This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Phys 3079.64.5

HARVARD COLLEGE
LIBRARY

FROM THE
FARRAR FUND

The bequest of Mrs. Eliza Farrar in memory of her husband, John Farrar, Hollis Professor of Mathematics, Astronomy and Natural Philosophy, 1807–1836

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bôcher, Maxime, Dozent an der Harvard-Universität zu Cambridge, Mass., Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 8.—

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 2.40.

——— Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 3.20.

Burkhardt, H., Professor an der Universität Zürich, Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen. 1. Lieferung. [176 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.60. 2. Lieferung. [S. 177—400.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 7.60. 3. Lieferung. [S. 401—768.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.40. 4. Lieferung. [S. 769—1072.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 10.—

[Die 5. (Schluß-) Lieferung erscheint Ostern 1905.]

Fischer, Dr. Karl T., Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper (mit einem kurzen Anhange über das sogenannte „absolute Maßsystem"), ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. [68 S.] gr. 8. 1902. kart. n. ℳ 2.—

——— Der naturwissenschaftliche Unterricht in England, insbesondere in Physik und Chemie. Mit einer Übersicht der englischen Unterrichtsliteratur zur Physik und Chemie und 18 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. [VIII u. 94 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

Föppl, Professor Dr. **A.,** Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bände. gr. 8. In Leinwand geb. I. Einführung in die Mechanik. 2. Auflage. Mit 96 Figuren im Text. [XIV u. 412 S.] 1900. n. ℳ 10.—. II. Graphische Statik. 2. Auflage. Mit 176 Figuren im Text. [XII u. 471 S.] 1903. n. ℳ 10.—. III. Festigkeitslehre. 2. Auflage. Mit 79 Figuren im Text. [XVIII u. 512 S.] 1900. n. ℳ 12.—. IV. Dynamik. 2. Auflage. Mit 69 Figuren im Text. [XV u. 506 S.] 1901. n. ℳ 12.—

Gleichen, Alexander, Lehrbuch der geometrischen Optik. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Kirchhoff, Dr. Gustav, weil. Professor der Physik an der Universität zu Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. 4 Bände. Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 39.—, in Leinwand geb. n. ℳ 47.—

Kohlrausch, Dr. F., Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Lehrbuch der praktischen Physik. Mit Figuren im Text. 9., umgearbeitete Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. [XXVII u. 610 S.] gr. 8. 1901. Biegsam in Leinwand geb. n. ℳ 8.60.

Kohlrausch, Dr. **F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XIX u. 260 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. ℳ 4. —

——— und Dr. **L. Holborn**, Das Leitvermögen der Elektrolyte, insbesondere der Lösungen. Methoden, Resultate und chemische Anwendungen. Mit Figuren im Text und 1 Tafel. [XVI u. 211 S.] gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. ℳ 5. —

Lorentz, H. A., Professor an der Universität Leiden, Wissenschaftliche Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. [Unter der Presse.]

Für den ersten Band, der voraussichtlich im Laufe des Jahres 1905 fertiggestellt werden wird, ist zunächst der Neudruck der Artikel über Molekulartheorie, Hydrodynamik und Mechanik in Aussicht genommen; daran schließen sich im weiteren Verlaufe des Werkes die Abhandlungen aus dem Gebiete der Elektrizitätslehre und Optik an. Die Arbeiten, welche bereits in deutscher, französischer oder englischer Sprache vorliegen, sollen in der betreffenden Sprache, die übrigen aber in deutscher Übersetzung aufgenommen werden.

Neumann, Dr. **Franz**, Professor an der Universität zu Königsberg, Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften. 8 Hefte: I. Magnetismus. [VIII u. 116 S.] 1881. n. ℳ 3.60. II. Theoretische Physik. [X u. 291 S.] 1883. n. ℳ 8.—. III. Elektrische Ströme. [X u. 308 S.] 1884. n. ℳ 9.60. IV. Optik. [VIII u. 310 S.] 1885. n. ℳ 9.60. V. Elastizität. [XIII u. 374 S.] 1885. n. ℳ 11.60. VI. Potential. [XVI u. 364 S.] 1887. n. ℳ 12.—. VII. Kapillarität. [X u. 234 S.] 1894. n. ℳ 8.—. VIII. Heft [In Vorbereitung].

Richarz, Dr. **F.**, Professor an der Universität Marburg, Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 1.50.

Starke, Dr. **Hermann**, Privatdozent an der Universität Berlin, Experimentelle Elektrizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. [XV u. 422 S.] gr. 8. 1904. geb. ca. ℳ 4. —

Volkmann, Dr. **P.**, Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.20.

Wallentin, Dr. **J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die Elektrizitätslehre. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 12. —

Webster, Arthur Gordon, A. B. (Harv.), Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, Director of the Physical Laboratory, Clark University, Worcester, Massachusetts, The Dynamics of Particles and of rigid, elastic, and fluid Bodies. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 14. —

THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

VON

Dr. M. ABRAHAM.

ERSTER BAND:

EINFÜHRUNG IN DIE MAXWELLSCHE THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

VON

Dr. A. FÖPPL.

ZWEITE, VOLLSTÄNDIG UMGEARBEITETE AUFLAGE,

HERAUSGEGEBEN VON

Dr. M. ABRAHAM.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

EINFÜHRUNG IN DIE
MAXWELLSCHE THEORIE
DER ELEKTRIZITÄT.

MIT EINEM EINLEITENDEN ABSCHNITTE

ÜBER DAS RECHNEN MIT VEKTORGRÖSZEN IN DER PHYSIK

VON

DR. A. FÖPPL.

ZWEITE, VOLLSTÄNDIG UMGEARBEITETE AUFLAGE,

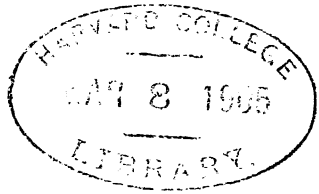
HERAUSGEGEBEN VON

DR. M. ABRAHAM.

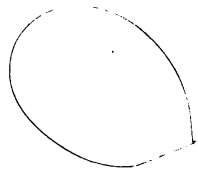
MIT 11 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Phys 3079.04.5



Farrar fund



3694
49-208
40-2

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort zur ersten Auflage.

Der Kreis der überzeugten Anhänger der Maxwellschen Elektrizitätslehre setzte sich bis vor einigen Jahren fast ausschließlich aus englischen Physikern zusammen. Schon früher schenkte man zwar auch auf deutschem Boden dieser Theorie große Beachtung; man war aber noch zu sehr in dem Banne der Fernwirkungslehre befangen, um sich vollständig in sie einleben zu können. Anfänglich richteten sich daher die Bestrebungen unserer Physiker vorwiegend dahin, eine Versöhnung beider Theorien herbeizuführen und womöglich ein allgemeines Schema aufzustellen, das beide als Spezialfälle in sich faßte. Eine andere Folge davon war, daß man sich zuerst und am meisten mit jener Seite der Maxwellschen Lehre befreundete, die von der Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aus den allgemeinen Prinzipien der Mechanik handelt. Denn der Ideengang, der dieser zugrunde liegt, ist seinem Wesen nach eng verwandt mit den älteren Untersuchungsmethoden, bei denen der Potentialbegriff die entscheidende Rolle spielte.

Alle Bemühungen, die Faraday-Maxwellsche Anschauung in den früheren Vorstellungskreis einzugliedern, ohne von diesem erhebliche Opfer zu bringen, mußten indessen in letzter Linie an den Verschiebungsströmen im freien Äther und an der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen scheitern. Kaum hatte daher Hertz diese Folgerung der Maxwellschen Theorie durch seine entscheidenden Versuche bestätigt, als er sich sofort dieser grundsätzlich zuwandte, nachdem er sich schon früher sehr mit ihr befreundet hatte.

Damit war der Wendepunkt gekommen. Heute denkt man kaum noch daran, in der Richtung des Weberschen Elementargesetzes weiter zu arbeiten, dessen Formulierung einst den Höhepunkt der Entwickelung der älteren Vorstellungen gebildet hatte. Nachdem sich schon auf Grund der älteren Theorie die Unhaltbarkeit

dieses Gesetzes definitiv herausgestellt hatte und sich kein Ersatz dafür finden ließ, war die Leistungsfähigkeit der Fernwirkungstheorie erschöpft, und ihre Unzulänglichkeit trat immer mehr zutage. Dadurch war der Boden für die Aufnahme einer grundsätzlich von jener verschiedenen Lehre wohl vorbereitet, und unter dem Eindrucke der Hertzschen Entdeckungen konnte sich der Umschwung der Meinungen daher mit ungewöhnlicher Schnelligkeit vollziehen.

So kam es, daß man heute der Maxwellschen Lehre überall das lebhafteste Interesse entgegenbringt. Nicht nur der Physiker von Fach, der Lehrer und der Studierende der Physik, sondern namentlich auch der wissenschaftlich gebildete Elektrotechniker sucht sich mit den Grundzügen dieser Theorie bekannt zu machen, in der man heute mit großer Wahrscheinlichkeit die bleibende Grundlage jeder physikalischen Forschung auf diesem Gebiete erblicken darf.

Hiermit entstand auch das Bedürfnis nach einer möglichst allgemein verständlichen, dabei aber doch wissenschaftlich strengen Darstellung der Maxwellschen Theorie. Denn das Maxwellsche Originalwerk, das als Hauptquelle zur Verfügung stand, stellt nicht nur ziemlich hohe Anforderungen an die mathematische Vorbildung und vielfach auch an die Geduld des Lesers, sondern es enthält, wie ja den Umständen nach gar nicht anders zu erwarten, auch manche Irrtümer, die inzwischen berichtigt sind, und es schlägt viele Umwege ein, die seitdem abgekürzt wurden.

Eine solche Bearbeitung hat Boltzmann in den von ihm herausgegebenen Vorlesungen geliefert. Ich glaube aber nicht, daß dadurch eine anderweitige Behandlung des Gegenstandes entbehrlich gemacht wurde, obschon sich jenem Buche in seiner Art kaum etwas Besseres zur Seite stellen lassen wird. Denn dieser Physiker hat, wenigstens in dem zur Einführung des Lesers bestimmten ersten Bande, sein Hauptaugenmerk auf die Ableitung der Gleichungssysteme des Feldes aus der Theorie der Zyklen gerichtet. Für den Anfänger scheint es mir aber nicht so sehr auf den Nachweis anzukommen, daß sich die Maxwellsche Theorie als Folgerung aus einem höheren Prinzipe ableiten läßt, sondern ich halte es für viel wichtiger, ihm eine möglichst unmittelbare und deutliche Vorstellung von den Begriffen und Auffassungen dieser Theorie zu geben, um ihn zu einem selbständigen Arbeiten damit

zu befähigen. Und ich bin ferner der Ansicht, daß die mechanischen Analogien der Zyklentheorie dieses Ziel nicht so bequem erreichen lassen, als der Weg, den ich hier eingeschlagen habe.

Bei der Bearbeitung dieses Buches ließ ich mich von jenem praktischen Beweggrunde in erster Linie leiten. Ich vermied es überall, die Energiebeziehungen zur Ableitung der Grundgesetze heranzuziehen, sondern stützte diese, soweit es irgend anging, unmittelbar auf die Erfahrungstatsachen. Natürlich versäumte ich nicht, nachträglich den Nachweis zu liefern, daß das Energieprinzip nun auch tatsächlich erfüllt wird. So habe ich auch die von Boltzmann vorangestellte Herleitung der Feldgleichungen aus den mechanischen Prinzipien nur im letzten Abschnitte kurz berührt, und ich hoffe, dem Leser die Einarbeitung in das ihm noch fremde Gebiet durch diese Anordnung erheblich erleichtert zu haben. Für die ausführlichere Darstellung dieser gleichwohl sehr wichtigen Betrachtungen verweise ich den Leser auf jenes vortreffliche Buch, behalte mir aber auch selbst noch vor, später ausführlicher darauf zurückzukommen.

An mathematischen Vorkenntnissen setzte ich bei dem Leser, um mich an einen möglichst weiten Kreis wenden zu können, nur die sichere Beherrschung der Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung voraus. Ich hoffe mit Zuversicht, daß meine Darstellung keinem Leser, der mit diesen genügend vertraut ist, besondere Schwierigkeiten bereiten wird. Bei der mathematischen Fassung der vorgetragenen Lehren habe ich mich allerdings überall der Bezeichnungen und Methoden des Vektorkalküls bedient; im ersten Abschnitte sind diese aber, soweit als sie gebraucht werden, in sehr einfacher und, wie ich unbedingt annehmen darf, auch sehr leicht verständlicher Weise erörtert.

Ich empfehle dem Leser, zunächst den ersten Abschnitt durchzusehen: er wird dort vieles finden, was ihm ohne weiteres vollkommen klar ist. Über das andere möge er zunächst hinweggehen und sofort mit dem Studium der folgenden Abschnitte beginnen. Bei Gelegenheit der Rückverweisungen auf die im ersten Abschnitte entwickelten Rechengesetze wird er dann schon von selbst darauf geführt werden, die vorher überschlagenen Entwickelungen aufs neue in Erwägung zu ziehen und an der Hand der konkreten Anwendungen, die davon gemacht werden sollen, wird er sich mit weit leichterer Mühe darin zurechtfinden, als wenn die mathematischen Lehren losgelöst von diesen bewältigt werden müßten.

Im übrigen habe ich es mir zur Aufgabe gemacht, eine größere Häufung von Formeln (abgesehen natürlich von der mathematischen Einleitung) tunlichst zu vermeiden und lieber mehr Text zur Wiedergabe meines Gedankenganges zu verwenden. Dieses Bestreben hat natürlich seine Grenzen, die durch die Rücksicht auf den präzisen Ausdruck gesteckt sind. Es wird aber ganz besonders unterstützt durch den Gebrauch der Vektorengleichungen, die in ihrer einfachen Gliederung fast wie abgekürzte Sätze des Textes gelesen werden können.

In der Tat gewinnt die Behandlung der Elektrizitätslehre so ungemein an Klarheit und Durchsichtigkeit durch die Einführung der Vektorgrößen selbst an Stelle ihrer Komponenten, daß es im ganzen entschieden weniger Anstrengung erfordern dürfte, sich zuerst mit den wenigen Rechengesetzen, um die es sich dabei handelt, vertraut zu machen und dann noch die Elektrizitätslehre durchzunehmen, als wenn man diese allein mit Hilfe der gewohnten Cartesischen Darstellungsmethode studiert. Die auf das Studium der Vektoranalysis zu verwendende Mühe wird daher sofort durch einen entsprechenden Gewinn reichlich belohnt, und außerdem erzielt man damit den dauernden Vorteil, sich mit jener analytischen Darstellungsform geometrischer Beziehungen vertraut zu machen, die zweifellos die mathematische Zeichensprache der Physik der Zukunft sein wird.

Bei der Herausgabe dieses Buches befand ich mich in einer ähnlichen Lage, wie etwa Weisbach, als seine Mechanik zum erstenmal erschien. Damals wußte man in den technischen Kreisen, für die sein Buch bestimmt war, noch wenig von der Differentialrechnung, und er zog es vor, lieber einen einleitenden Abschnitt darüber vorauszuschicken, als auf deren Anwendung zu verzichten oder sich nur an solche Leser zu wenden, die schon damit vertraut waren. Heute ist dies nicht mehr nötig; hoffentlich dauert es aber nicht mehr gar zu lange, bis auch ein solcher einleitender Abschnitt über die Rechnung mit Vektoren ebenso entbehrlich wird, und zwar auch bei uns in Deutschland, während es in England heute schon so ist. Das Land, das einen Graßmann hervorbrachte, sollte gegen das Geburtsland Hamiltons mit der Einführung dieser wichtigen Verbesserung in den mathematischen Hilfsmitteln der theoretischen Physik nicht länger zurückstehen.

Am engsten schloß ich mich bei der Darstellung des Rechnens mit Vektoren, wie in vielen anderen Punkten, an das von O. Heaviside

in seinen Abhandlungen, die vor kurzem auch gesammelt im Buchhandel erschienen sind, gegebene Muster an. Von den Arbeiten dieses Meisters ist meine Darstellung überhaupt mehr beeinflußt als von denen irgendeines anderen Physikers, mit Ausnahme von Maxwell selbst natürlich. Ich halte Heaviside für den hervorragendsten Nachfolger Maxwells nach der spekulativ-kritischen Seite hin, wie es der uns leider so früh entrissene Hertz zweifellos nach der experimentell-bestätigenden Seite hin war.

Quellenangaben habe ich in diesem Buche grundsätzlich fortgelassen. Man wird mir daraus vielleicht einen Vorwurf machen, den ich bei einem wissenschaftlichen Werke im allgemeinen auch als sehr berechtigt anerkennen muß. Ich hatte aber meine guten Gründe zu diesem Verfahren, und ich hoffe, daß mich ihre Darlegung in den Augen aller billig Denkenden rechtfertigen wird. Ich wollte kein Handbuch, sondern ein Lehrbuch schreiben, das möglichst aus einem Gusse sein sollte. Deshalb vermied ich es so viel als irgend tunlich, während der Bearbeitung die von mir früher gelesenen Schriften nachzuschlagen, um mich nicht unmittelbar von ihnen beeinflussen zu lassen. Von den Entwickelungen und den Ergebnissen anderer Autoren wollte ich mich nur so weit leiten lassen, als sie sich meinem Gedächtnisse fest eingeprägt und sich mit meinen eigenen Anschauungen innig verschmolzen hatten. Auf diese Art hoffte ich zu einer einheitlicheren und in sich besser gefügten Darstellung des ganzen Systemes zu gelangen, als es im anderen Falle möglich gewesen wäre.

Nach Beendigung der Arbeit schien es mir aber undurchführbar, nachträglich genaue Rechenschaft darüber abzulegen, woher jeder einzelne Gedanke, den ich benutzte, ursprünglich stammte. Selbst über den Anteil, den ich für mich selbst in Anspruch nehmen darf, bin ich an vielen Stellen im Zweifel. Ich verzichte aber von vornherein gern auf die Erhebung aller Prioritätsansprüche und begnüge mich damit, nur auf die Darstellungsform Urheberrechte geltend zu machen. Eine Ausnahme davon bitte ich nur in bezug auf die Behandlung der mit der magnetischen Härte zusammenhängenden Erscheinungen machen zu dürfen, bei der ich kaum aus fremden Quellen schöpfte.

Lehrbüchern von solcher Tendenz hat man übrigens von jeher gestattet, von der fortlaufenden Bezugnahme auf die Originalarbeiten abzusehen, während man sie für ein Handbuch mit Recht als un-

erläßlich ansieht. Möge daher der Leser diesen Mangel, wenn er ihn als solchen empfindet, mit Nachsicht beurteilen.

Mit vollem Rechte hat Boltzmann die Physiker aufgefordert, beim Anschreiben der Formeln sich möglichst der ursprünglichen Bezeichnungen Maxwells zu bedienen, weil das Studium sehr dadurch erleichtert wird, wenn man von vornherein überall bekannte Symbole vorfindet. Soweit es sich um die Bezeichnung der Vektorgrößen selbst handelt, bin ich ihm auch gefolgt; für die Komponenten habe ich aber überall dieselben Buchstaben, wie für die Vektoren gewählt (nur in anderer Schrift und mit entsprechenden Abzeichen), weil die Zahl der Zeichen, deren Bedeutung man sich zu merken hat, dadurch ganz erheblich vermindert wird. Ich suchte hierbei die Interessen der Anfänger wahrzunehmen, ohne die der schon Erfahrenen zu verletzen.

Neuerdings bedienen sich die englischen Physiker, nach dem Vorgange von Heaviside, mit großem Vorteile fetter Lettern zur Kennzeichnung der Vektorgrößen. Ich nahm diesen wichtigen Vorteil gleichfalls wahr, bediente mich aber außerdem, so wie Maxwell selbst, der Frakturbuchstaben für die Vektoren. Ich halte es für einen Nachteil, daß man in England hiervon abgegangen ist, weil dieses Kennzeichen auch in der Handschrift bestehen bleibt, in der man mit fetten Lettern u. dgl. nicht operieren kann.

Für die Kennzeichnung des Vektorproduktes ließ die Verlagsbuchhandlung mit dankenswerter Bereitwilligkeit das Operationszeichen $\mathfrak{V}$ herstellen, das sich von dem in der Potentialtheorie oft gebrauchten gewöhnlichen Buchstaben V deutlich unterscheidet, so daß jedes Mißverständnis ausgeschlossen ist.

Alle Betrachtungen, die mir schwieriger und dabei für die erste Einführung in die Theorie entbehrlich zu sein schienen, habe ich aus diesem Buche fortgelassen. Wenn sich die Erwartungen erfüllen, die ich an die Herausgabe des Buches knüpfe, wenn es also namentlich in weiteren Kreisen Verbreitung und Absatz und wenn ferner die von mir gewählte Behandlung den erhofften Beifall findet, beabsichtige ich, diesem Bande einen zweiten folgen zu lassen, der jene schwierigeren Teile behandeln soll. Es würde sich dabei nach meinem jetzigen Plane namentlich um die Behandlung der Vektorfunktionen (als Ergänzung des ersten Abschnittes) und der äolotropen Körper und um die tiefer eindringende Darstellung der Elektrodynamik bewegter Leiter und der hier im letzten Ab-

schnitte nur ganz kurz zusammengefaßten Lehren (namentlich der elektromagnetischen Wellen) handeln.

Vor 11 Jahren kam ich, nachdem ich mich bis dahin ausschließlich mit den technischen Wissenschaften beschäftigt hatte, zu Herrn Geheimrat Prof. Dr. G. Wiedemann mit dem Entschlusse, die Elektrizitätslehre eingehend zu studieren, und erbat mir seinen Rat über den dabei innezuhaltenden Plan. Dieser hervorragende Forscher, der mir seit jenem Tage ein überaus wohlwollender Lehrer, Förderer und Gönner war, wies mich schon bei meinem ersten Besuche u. a. lebhaft auf die Maxwellschen Arbeiten hin. Zunächst freilich folgte ich ihm hierin nicht, es drängte mich mehr, in die Meisterarbeiten der deutschen Schule einzudringen, und erst nachdem ich hierbei die Überzeugung gewonnen hatte, daß auf diesem Wege kaum noch ein durchschlagender Fortschritt erhofft werden könne, war ich der Lehre des großen Briten zugänglicher geworden.

Daß ich mich schließlich noch zur Bearbeitung dieses Buches entschloß, ist ganz wesentlich auf die Anregungen zurückzuführen, die mir im fortlaufenden Verkehre mit jenem bedeutenden Gelehrten, der mein Interesse der Maxwellschen Theorie stets von neuem wieder zulenkte, in reichem Maße zuteil wurden. Es möge mir daher gestattet sein, Herrn G. Wiedemann auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für das Interesse auszusprechen, das er von Anfang an an mir und meinen Arbeiten nahm und das er oft genug durch die Tat zum Ausdrucke brachte.

Der Verlagsbuchhandlung spreche ich meinen Dank und meine Anerkennung für die sorgfältige und gefällige Herstellung des Druckes aus. Schon in ihrem Interesse wünsche ich diesem Buche neben dem wissenschaftlichen — an dem mir natürlich am meisten gelegen ist — auch einen geschäftlichen Erfolg.

Leipzig, im April 1894.

A. Föppl.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der vom Verfasser der ersten Auflage ausgesprochene Wunsch hat sich erfüllt. Seine „Einführung in die Maxwellsche Theorie" hat sich viele Freunde erworben und ist der Verbreitung der Maxwellschen Ideen in Deutschland recht förderlich gewesen.

Die notwendig gewordene Neuauflage glaubte Herr Professor A. Föppl nicht selbst übernehmen zu sollen. Seine Tätigkeit auf dem Gebiete der technischen Mechanik hat ihn zu sehr von der Beschäftigung mit der Elektrizitätstheorie abgezogen; dieses war auch der Grund, daß der von ihm geplante zweite Teil des Werkes nicht erschienen ist.

Der Aufforderung, die Bearbeitung der zweiten Auflage zu übernehmen, leistete ich gern Folge. Denn ich bin der Überzeugung, daß ein Buch von der Eigenart des Föpplschen auch heute nicht entbehrlich ist. An dem weiteren Ausbau der Elektrizitätstheorie selbst teilnehmend, hegte ich anderseits schon längst die Absicht, dieser Theorie ein die Fortschritte des letzten Jahrzehntes umfassendes Werk zu widmen. Dem vorliegenden ersten Bande der „Theorie der Elektrizität", der gleichzeitig die umgearbeitete Neuauflage der „Einführung in die Maxwellsche Theorie" darstellt, beabsichtige ich demgemäß einen zweiten Band folgen zu lassen, welcher die „Theorie der elektromagnetischen Strahlung" behandeln soll. Ihm ist die atomistische Weiterbildung der Maxwellschen Theorie vorbehalten, die zur Lorentzschen Elektronentheorie führt, ferner die ausführlichere und strengere Theorie der Licht- und Wärmestrahlung, der Hertzschen Schwingungen und der drahtlosen Telegraphie. Beide Bände zusammen sollen eine Übersicht über die wichtigsten Teile der modernen Theorie der Elektrizität geben.

Die Grundvorstellungen der Maxwellschen Theorie sind heute wohl von allen produktiv arbeitenden Physikern angenommen. Diese Vorstellungen bilden die Grundlage jeder Elektrizitätstheorie. Der Kampf zwischen Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik ist entschieden. Heute steht eine andere Frage zur Diskussion, nämlich die, ob die Weiterbildung und Spezialisierung der Nahewirkungstheorie, welche die

Elektronentheorie anstrebt, geeignet ist, ein allseitig getreues Bild der Tatsachen zu geben. Ich habe geglaubt, die Erörterung dieser Frage dem zweiten Bande zuweisen zu sollen, und bin in dem vorliegenden ersten Bande auf dem Maxwell-Hertzschen Standpunkte stehen geblieben. Ich bin in der Tat der Überzeugung, daß man, um die Elektronentheorie gründlich zu studieren, zunächst die Maxwellsche Theorie kennen lernen muß. Das Verhältnis dieser beiden Theorien ist ein ähnliches, wie das der Molekulartheorie und der allgemeinen Mechanik. Die allgemeine Mechanik behandelt die mechanischen Eigenschaften der Körper ohne Heranziehung molekularer Hypothesen. Sie schließt solche Hypothesen indessen keineswegs aus, sondern läßt deren nachträgliche Einführung zu. Ähnlich läßt die Maxwellsche Theorie der atomistischen Weiterbildung freien Raum. Anderseits hat man, wenn man irgendeine Kraft, z. B. den Gasdruck, durch Bewegungen der Moleküle erklären will, diese Bewegungen nach den Methoden der allgemeinen Mechanik zu behandeln. Dementsprechend sind die Bewegungen der elektrischen Atome auf Grund der Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie zu bestimmen. Das Studium der Maxwellschen Theorie muß daher unbedingt dem Studium der Elektronentheorie vorangehen, ebenso wie das Studium der Mechanik dem der kinetischen Gastheorie.

Die allgemeine Anlage des vorliegenden Bandes wurde in der Neuauflage beibehalten. Die Theorie der Vektoren und der Vektorfelder wurde auch hier an die Spitze gestellt; sie wurde durch Einfügung der Theorie des Vektorpotentiales, der Umrechnung auf bewegte Bezugssysteme u. a. ergänzt, so daß man nach der Lektüre des ersten Abschnittes über die Begriffe der Vektortheorie frei verfügen kann und Schwierigkeiten rein mathematischer Art weiterhin dem Verständnis nicht begegnen. Auch sind in den ersten Abschnitt Sätze der Mechanik starrer Körper und der Hydrodynamik eingearbeitet worden, die in späteren Abschnitten des Werkes zur Verwendung gelangen. Sie dienen gleichzeitig zur Erläuterung der angewandten Symbolik, die durch ihre jede unnütze Weitschweifigkeit vermeidende Kürze der klaren Formulierung der physikalischen Begriffe so förderlich ist.

Der zweite Abschnitt ist dem elektrischen Felde gewidmet. Im dritten Abschnitte treten die magnetischen Vektoren hinzu. Diese werden zuerst in Verbindung mit den elektrischen Strömen

eingeführt, der Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion wird durch die induktive Wirkung auf eine Probespule definiert. So wird sein Name und seine quellenfreie Verteilung ohne weiteres verständlich. Vor der historisch überlieferten Anlehnung der Theorie des magnetischen Feldes an die Wirkungen auf permanente Magnete besitzt diese Einführung der magnetischen Vektoren den Vorzug, daß sie die Theorie auf gut verstandene Vorgänge gründet. Die an permanenten Magneten beobachteten Wirkungen sind weit weniger aufgeklärt, sie werden erst im vierten Abschnitte behandelt.

Ich habe mich bemüht, die allgemeinen Gleichungen durch Anwendung auf konkrete, möglichst einfach gewählte Fälle zu erläutern. So habe ich im dritten Abschnitte die Theorie der elektrischen Resonanz und die Schwingungen gekoppelter Systeme behandelt; diese Dinge sind für die drahtlose Telegraphie von Interesse und bereiten die weitergehenden Entwickelungen des zweiten Bandes vor. Ferner findet man in diesem Abschnitte die Theorie der Versuche von E. Hagen und H. Rubens über die Reflexion langwelliger Wärmestrahlen durch Metalle, die eine so willkommene Bestätigung der Maxwellschen Feldgleichungen ergeben haben. Auch den elektrischen Drahtwellen werden einige Paragraphen gewidmet.

Wo die Elektronentheorie zu einer Modifikation der Maxwell-Hertzschen Vorstellungen geführt hat, wird dieses angedeutet und so die Brücke zu den ausführlicheren Darlegungen des zweiten Bandes geschlagen.

Von Quellenangaben mußte natürlich auch in der neuen Auflage im allgemeinen abgesehen werden. Man wird dieses um so eher entschuldigen, als in den betreffenden Artikeln der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften eine vollkommene Literaturübersicht zur Verfügung steht. Ich habe mich nach Möglichkeit an die Schreibweise der Enzyklopädie angeschlossen; so habe ich z. B. die eckige Klammer als Zeichen des Vektorproduktes gewählt.

Ich hoffe, daß diese Neuauflage dem Buche neue Freunde erwerben wird. Anderseits glaube ich doch, trotz der vorgenommenen Umarbeitung, dem Werke die Eigenart gewahrt und so die alten Freunde erhalten zu haben.

Cambridge, im Juli 1904.

M. Abraham.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung . . . . . 1—3

Erster Abschnitt.

Vektoren und Vektorfelder.

Erstes Kapitel.

Die Vektoren.

§ 1. Definition des Vektors 4
§ 2. Addition und Subtraktion von Vektoren 6
§ 3. Differentiierung nach einer skalaren Veränderlichen 8
§ 4. Die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Komponenten eines Vektors . . 10
§ 5. Das innere (skalare) Produkt 13
§ 6. Das äußere Produkt oder Vektorprodukt 16
§ 7. Produkte dreier Vektoren 19
§ 8. Polare und axiale Vektoren. Skalare und Pseudoskalare . . 22
§ 9. Bewegung starrer Körper 23
§ 10. Prinzip der virtuellen Arbeit und Satz der statischen Momente 27
§ 11. Stabilität des Gleichgewichtes 30
§ 12. D'Alemberts Prinzip. Die Impulssätze 31
§ 13. Rotierendes Bezugssystem 34
§ 14. Trägheitsmomente. Tensortripel 36
§ 15. Die Gleichungen von Lagrange 40

Zweites Kapitel.

Die Vektorfelder.

§ 16. Die hydrodynamische Abbildung 43
§ 17. Die lineare Vektorfunktion 45
§ 18. Das wirbelfreie Feld und das Potential 48
§ 19. Die Ergiebigkeit eines Quellenfeldes und die Divergenz . . 51
§ 20. Die Sätze von Gauß und Green 54
§ 21. Quellpunkte und Doppelquellen 59
§ 22. Berechnung des wirbelfreien Vektorfeldes aus dem Quellenfelde 64
§ 23. Unstetigkeitsflächen im wirbelfreien Felde. Flächendivergenz. Doppelschichten 70
§ 24. Der Wirbel oder Curl eines Vektors 78

Seite

§ 25. Der Satz von Stokes 82
§ 26. Berechnung des quellenfreien Vektorfeldes aus dem Wirbelfelde 89
§ 27. Unstetigkeitsflächen im quellenfreien Felde. Flächenwirbel . 94
§ 28. Zerlegung eines beliebigen Vektorfeldes in ein quellenfreies und ein wirbelfreies Feld 98
§ 29. Die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht 103
§ 30. Rechnungsregeln. Die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ 110
§ 31. Zeitliche Änderung eines Vektorfeldes, beurteilt von einem bewegten Bezugssysteme aus. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik 112
§ 32. Zeitliche Änderung von Linien- und Flächenintegralen, bezogen auf bewegte Linien und Flächen. Die Wirbelsätze von Helmholtz 115

Zweiter Abschnitt.

Das elektrische Feld.

Erstes Kapitel.

Das elektrostatische Feld im Luftraume.

§ 33. Elektrizitätsmenge und elektrische Feldstärke 123
§ 34. Der Kraftfluß 126
§ 35. Das elektrostatische Potential. Die metallischen Leiter . . 129
§ 36. Die Kapazität des Kugelkondensators und des gestreckten Rotationsellipsoides 133
§ 37. Ein elektrischer Punkt gegenüber einer leitenden Ebene . . 138

Zweites Kapitel.

Dielektrika.

§ 38. Dielektrizitätskonstante und elektrische Verschiebung . . . 141
§ 39. Wahre und freie Elektrizität. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien 145
§ 40. Ein elektrischer Punkt gegenüber einem dielektrischen Halbraume 150
§ 41. Die Polarisation der Dielektrika 154
§ 42. Eine homogen polarisierte Kugel 159

Drittes Kapitel.

Die Energie und die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes.

§ 43. Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie 163
§ 44. Der Thomsonsche Satz 168
§ 45. Das Gesetz von Coulomb 173
§ 46. Eine dielektrische oder leitende Kugel im inhomogenen Felde 178

Viertes Kapitel.

Der elektrische Strom.

Seite
§ 47. Die Gesetze von Ohm und Joule 182
§ 48. Leitungsstrom und Verschiebungsstrom 186
§ 49. Der Konvektionsstrom 189
§ 50. Die elektromotorischen oder eingeprägten elektrischen Kräfte 194
§ 51. Die elektrische Kontaktkraft 198
§ 52. Räumlich verteilte elektromotorische Kräfte 203
§ 53. Die Maßeinheiten und Dimensionen der elektrischen Größen 207

Dritter Abschnitt.

Das elektromagnetische Feld.

Erstes Kapitel.

Die magnetischen Vektoren.

§ 54. Die Analogie der elektrischen und der magnetischen Größen 211
§ 55. Die magnetische Induktion 214
§ 56. Die magnetische Feldstärke 217
§ 57. Der freie Magnetismus und das skalare Potential eines magnetisierten Körpers 224
§ 58. Der freie elektrische Strom und das Vektorpotential eines magnetisierten Körpers 229
§ 59. Die beiden Hauptgleichungen 235
§ 60. Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper 243
§ 61. Maßeinheiten und Dimensionen 249

Zweites Kapitel.

Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

§ 62. Die Anwendung des Vektorpotentiales in der Elektrodynamik 254
§ 63. Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme 258
§ 64. Der elektrische Strom als zyklisches System. Die Lagrangeschen Gleichungen 266
§ 65. Ein Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion . . . 273
§ 66. Ein Stromkreis mit Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand. Elektrische Eigenschwingungen 279
§ 67. Elektrische Resonanz 288
§ 68. Zwei induktiv gekoppelte Stromkreise 294

Drittes Kapitel.

Elektromagnetische Wellen.

§ 69. Ebene Wellen in einem isotropen, homogenen Dielektrikum. 303
§ 70. Ebene Wellen in Halbleitern 312

Seite
§ 71. Das Reflexionsvermögen der Metalle 318
§ 72. Das Eindringen elektrischer Schwingungen in Metalle. Der vollkommene Leiter 325
§ 73. Fortpflanzung elektrischer Wellen längs zylindrischer Leiter 331
§ 74. Wellen in Kabeln 345
§ 75. Wellen längs zweier paralleler Drähte 347
§ 76. Kondensator am Ende der Leitung 350
§ 77. Der Poyntingsche Energiestrom 356
§ 78. Der Energiestrom in der Umgebung eines elektrischen Stromes 363

Vierter Abschnitt.

Weiterer Ausbau der Theorie.

Erstes Kapitel.

Die ferromagnetischen Körper.

§ 79. Die magnetische Hysteresis 368
§ 80. Der remanente Magnetismus 373
§ 81. Äquivalenz von Magneten und elektrischen Strömen 378
§ 82. Die ponderomotorischen Kräfte zwischen permanenten Magneten und elektrischen Strömen 386
§ 83. Eingeprägte magnetische Kräfte 388

Zweites Kapitel.

Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 84. Induktion durch Bewegung zweier Stromringe 390
§ 85. Die Magnetinduktion 394
§ 86. Die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper 398
§ 87. Unipolare Induktion 405
§ 88. Ponderomotorische Kraft an einem Stromelemente 409
§ 89. Die Maxwellschen Spannungen 413
§ 90. Die erste Hauptgleichung für bewegte Körper 424
§ 91. Relative und absolute Bewegung 430

Einleitung.

Die Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen gründete sich bis zum Auftreten Maxwells auf die Vorstellung von Fernwirkungen zwischen elektrisierten, magnetisierten oder von elektrischen Strömen durchflossenen Körpern. Nur die Anschauungen Faradays wichen in dieser Hinsicht von denen aller anderen Physiker ab. Faraday war aber nicht genug Mathematiker, um seiner Auffassung eine nach allen Seiten erschöpfende und widerspruchsfreie Form zu geben, die sie zum Range einer Theorie erhoben hätte; obschon auch seine Art, die elektrischen Erscheinungen aufzufassen und zu beschreiben, eine mathematische war, ohne daß er sich der gewöhnlichen mathematischen Zeichensprache bedient hätte. Erst Maxwell gelang dies und er schuf, indem er die Ideen Faradays in strenge mathematische Formen brachte, ein Lehrgebäude, das schon in der Anlage von der Fernwirkungstheorie wesentlich verschieden war, bei seinem weiteren Ausbau aber sich immer weiter von dieser entfernte.

Die Entdeckungen von Heinrich Hertz erbrachten den Nachweis, daß sich in der Tat im Dielektrikum, insbesondere im luftleeren Raume, elektromagnetische Vorgänge abspielen. Seitdem sind die Grundvorstellungen der Maxwellschen Theorie wohl von allen Physikern angenommen worden. Welches sind nun die wesentlichen Kennzeichen, welche die Maxwellsche Nahewirkungstheorie von den Fernwirkungstheorien trennen?

Als wesentliche Grundgedanken der Maxwellschen Lehre werden wir die folgenden zu betrachten haben:

1. Die Vorstellung, daß alle elektrischen und magnetischen Einwirkungen eines Körpers auf einen von ihm getrennten anderen Körper durch die Vermittelung des dazwischenliegenden leeren oder von Materie erfüllten Raumes erfolgen.
2. Daß der Sitz der elektrischen bzw. magnetischen Energie nicht allein in den elektrisierten, magnetisierten oder elektrisch durchströmten Körpern zu suchen ist, sondern auch, und vielfach überwiegend, in dem umgebenden Felde.
3. Daß der elektrische Strom in einer ungeschlossenen Leitungsbahn durch einen im Dielektrikum anzunehmenden „Verschiebungsstrom“ zu einer geschlossenen Strömung ergänzt wird, und daß dieser Verschiebungsstrom in derselben Weise mit der magnetischen Feldstärke verknüpft ist, wie der Leitungsstrom.
4. Daß der magnetische Induktionsfluß keine Quellen besitzt, oder mit anderen Worten, daß nirgends wahrer Magnetismus auftreten kann.
5. Daß die Lichtwellen elektromagnetische Wellen sind.
6. Die Betonung der Analogie der mechanischen und der elektromagnetischen Vorgänge, die in der Ableitung der elektromagnetischen Gleichungen aus den Grundgleichungen der Mechanik, etwa den Lagrangeschen, ihren Ausdruck findet.
7. Die Darstellung der Grundgesetze des Elektromagnetismus durch Gleichungen zwischen Vektoren.

Der zuletzt angeführte Punkt bezieht sich in gewissem Sinne nur auf eine Äußerlichkeit; trotzdem ist seine Bedeutung nicht zu unterschätzen. Maxwell selbst hat die Darstellung der Gleichungen nach der Quaternionentheorie nur mehr nebenbei gegeben; in der Hauptsache bedient er sich der Cartesischen Darstellungsweise. In dieser läßt sich aber weit schwieriger eine Übersicht über den Zusammenhang aller Formeln gewinnen. Diese wird durch Verwendung der Vektorrechnung sehr erleichtert. Die Mühe, die es kostet, sich mit dieser vertraut zu machen, wird durch die Vorteile, die sich

daraus ergeben, reichlich aufgewogen. Es ist in der Tat die einzige Methode, die sich den Erfordernissen der Aufgabe willig anpaßt, wenn es sich darum handelt, die Faradaysche Idee des Kraftflusses möglichst getreu wiederzugeben. Wir stellen daher die Theorie der Vektoren und der Vektorfelder an die Spitze des Werkes. Die gegebene Darstellungsweise ist als ein Kompromiß der Graßmannschen Ausdehnungslehre und der Hamiltonschen Quaternionentheorie zu bezeichnen; sie ist von O. Heaviside und W. Gibbs befürwortet worden und wird jetzt von nahezu allen auf dem Gebiete der Elektrodynamik arbeitenden Forschern angewandt. Dieser Darstellungsmethode, die auch in der Mechanik starrer Körper und in der Hydrodynamik von Nutzen ist, werden wir uns in den folgenden Abschnitten durchweg bedienen.

Erster Abschnitt.

Vektoren und Vektorfelder.

Erstes Kapitel.

Die Vektoren.

§ 1. Definition des Vektors.

Unter den Größen, die zur mathematischen Darstellung geometrischer Gebilde oder physikalischer Zustände und Vorgänge dienen, zeichnen sich durch ihre Einfachheit die sogenannten Skalaren aus. Eine Größe wird Skalar genannt, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in stetiger, umkehrbar eindeutiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zuzuordnen ist. Die Forderung der umkehrbar eindeutigen Zuordnung besagt, daß nach Festsetzung der Maßeinheit die Gleichheit zweier Werte der Größe an der Gleichheit der Maßzahlen, die Forderung der Stetigkeit, daß die näherungsweise Gleichheit der Werte an der näherungsweisen Gleichheit der Maßzahlen erkennbar sein soll. Es gibt Skalaren, z. B. Masse, Volumen, Dichte, deren Maßzahlen stets positiv sind; andere, z. B. Potential, Elektrizitätsmenge, sind sowohl positiver, wie negativer Werte fähig.

In manchen Zweigen der Wissenschaft pflegt man die Maßeinheiten auf die drei Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit zu beziehen; die Dimension einer Größe in einem solchen „absoluten Maßsystem“ drückt die Maßeinheit durch die Grundeinheiten aus. Ob man nun jene drei Grundeinheiten, oder andere dem Dimensionssystem zugrunde legt, darüber mag zunächst keine Festsetzung getroffen werden.

Jedenfalls müssen in einer Gleichung stets die beiderseits stehenden Größen nicht nur der Maßzahl, sondern auch der Dimension nach gleich sein; Verschiedenheit der Dimension würde nämlich bedingen, daß bei einer Änderung der Grundeinheiten die Gleichheit der Maßzahlen fortfiele.

Es gibt geometrische und physikalische Größen, die nicht zur Klasse der Skalaren gehören. So ist die Gesamtheit der geradlinigen Verrückungen, die einen beweglichen Punkt aus einer bestimmten Anfangslage in eine beliebige Endlage überführen, keineswegs in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zuzuordnen; zur eindeutigen Festlegung der Endlage sind vielmehr drei Zahlangaben notwendig; denn eine Zahlangabe ist erforderlich, um den Betrag der Verrückung zu bestimmen, d. h. den Abstand von Anfangslage und Endlage, zwei weitere zur Bestimmung der Richtung. Die Verrückung eines Punktes repräsentiert eine Klasse von Größen, die man als Vektoren bezeichnet.

Wir nennen eine physikalische Größe einen Vektor, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise der Gesamtheit der geradlinigen Verrückungen zuzuordnen ist, welche einen Punkt aus einer festen Anfangslage in eine beliebige Endlage überführen. Die an einem materiellen Punkte angreifende Kraft ist ein Beispiel eines Vektors; in der Tat betrachtet man zwei Kräfte dann und nur dann als physikalisch gleichwertig, wenn sie dem Betrage und der Richtung nach übereinstimmen. Andere Vektoren sind Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke.

Jedem Vektor kommt eine bestimmte Dimension zu; zwei Vektoren werden als gleich nur dann zu bezeichnen sein, wenn nicht nur die repräsentierenden Verrückungen, sondern auch die Dimensionen gleich sind.

Jedem Vektor kann ein Skalar zugeordnet werden, der dem Betrage der repräsentierenden Verrückung entspricht.

Wir nennen diesen Skalar „Betrag des Vektors“ und schreiben ihm die Dimension des Vektors selbst zu.

Zur Kennzeichnung der Vektoren sind in dieser Schrift ein für allemal gotische Buchstaben angewendet, während die lateinischen und griechischen Lettern zur Bezeichnung von Skalaren dienen. So bezeichnet $\mathfrak{B}$ einen Vektor; sein Betrag wird durch $|\mathfrak{B}|$ dargestellt.

§ 2. Addition und Subtraktion von Vektoren.

Die Regeln der Vektoraddition gewinnen wir durch Zusammensetzung geradliniger Verrückungen. Dabei mögen solche Verrückungen als gleichwertig betrachtet, d. h. einem und demselben Werte des darzustellenden Vektors zugeordnet werden, die nach Richtung und Betrag übereinstimmen, wenn sie auch von verschiedenen Punkten des Raumes ausgehen. Diese Festsetzung ermöglicht es, zwei Verrückungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aneinander zu fügen; infolge der Verrückung $\mathfrak{A}$ gelangte der bewegliche Punkt von 1 nach 2, infolge der Verrückung $\mathfrak{B}$ von 2 nach 3. Die geradlinige Verrückung $\mathfrak{C}$, die direkt von 1 nach 3 führt, definiert die geometrische Summe oder Resultierende der Verrückungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

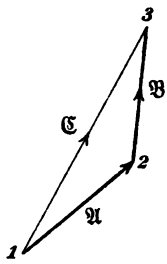


Abb. 1.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}. \qquad \text{(Abb. 1.)} \tag{1}$$

Führt man zuerst die Verrückung $\mathfrak{B}$ und darauf die Verrückung $\mathfrak{A}$ aus, so gelangt man gleichfalls zur Endlage (3). Es befolgt daher die Vektoraddition das kommutative Gesetz:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Zwei Vektoren von gleicher Richtung werden demnach addiert, indem man ihre Beträge addiert und ihre Richtung ungeändert läßt; hier artet die Vektoraddition in Addition skalarer Größen aus. Auch die Vektorsubtraktion wird man so definieren, daß sie für Vektoren gleicher Richtung auf die

Subtraktion von Skalaren führt. Das geschieht durch die Festsetzung:

Ein Vektor $\mathfrak{B}$ wird von einem Vektor $\mathfrak{A}$ subtrahiert, indem man einen Vektor von dem gleichen Betrage wie $\mathfrak{B}$ und von entgegengesetzter Richtung zu $\mathfrak{A}$ addiert. Führt die Verrückung, die den Vektor $\mathfrak{A}$ darstellt, von 1 nach 2, die Verrückung, die $\mathfrak{B}$ darstellt, von 1 nach 4, so repräsentiert die Verrückung von 4 nach 2 den Vektor $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ (Abb. 2).

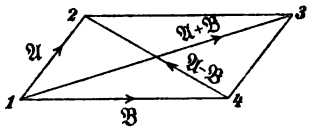


Abb. 2.

Die Vektoren $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ werden durch die Diagonalen des Parallelogramms dargestellt, welches die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmen.

Aus der Definition der Vektoraddition folgt ohne weiteres, daß für sie das assoziative Gesetz gilt

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{D} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D}). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) schließt man, daß die geometrische Summe dreier Vektoren von ihrer Reihenfolge unabhängig ist, und überträgt dieses Resultat ohne weiteres auf eine beliebige Anzahl von Vektoren.

Unter dem Produkte eines Skalars m und eines Vektors $\mathfrak{A}$ verstehen wir einen Vektor $\mathfrak{B} = m \cdot \mathfrak{A}$, dessen Richtung mit derjenigen von $\mathfrak{A}$ identisch ist, während sein Betrag der m-fache des Betrages von $\mathfrak{A}$ ist.

Einen Vektor $\mathfrak{B}$ kann man stets auffassen als Produkt seines Betrages $|\mathfrak{B}|$ und eines Vektors $\mathfrak{B}_1$ vom Betrage 1.

$$\mathfrak{B} = |\mathfrak{B}| \cdot \mathfrak{B}_1. \tag{4}$$

$\mathfrak{B}_1$ wird als „Einheitsvektor“ bezeichnet; da wir übereingekommen waren, dem Betrage eines Vektors $\mathfrak{B}$ die Dimension desselben zu geben, so kommt dem Einheitsvektor $\mathfrak{B}_1$ die Dimension Null zu; er bestimmt nur die Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$.

Die vorstehend entwickelten Regeln der Addition und Subtraktion von Vektoren stimmen formal mit den Gesetzen

der gewöhnlichen Algebra überein; das gleiche gilt offenbar für die Multiplikation eines Vektors mit Skalaren und für die Kombination dieser Operation mit der Addition und Subtraktion.

§ 3. Differentiierung nach einer skalaren Veränderlichen.

Der Differentialquotient $\frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ eines Vektors $\mathfrak{r}$ nach einer skalaren Variabeln s ist definiert als der Grenzwert, dem der Differenzenquotient $\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta s}$ zustrebt, wenn der Zuwachs Δs der unabhängigen Veränderlichen verschwindend klein wird; dabei ist die Differenz $\Delta\mathfrak{r}$ zweier, den Werten s und $s+\Delta s$ der Unabhängigen entsprechender Werte des Vektors in dem Sinne zu verstehen, der im vorigen Paragraphen erklärt wurde.

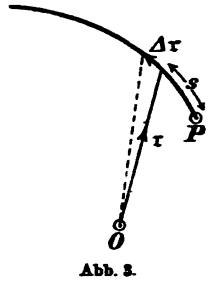


Abb. 3.

Als Beispiel betrachten wir eine beliebige Raumkurve (Abb. 3); $\mathfrak{r}$ bezeichne den von einem festen Punkte 0 nach einem beliebigen Kurvenpunkte gezogenen Radiusvektor, s die Länge des von einem bestimmten Punkte P an gerechneten Bogens. Der Zuwachs $\Delta\mathfrak{r}$ ist gleich der Sehne, die zu dem Bogen Δs gehört. In der Grenze ist $\Delta\mathfrak{r}$ ein Vektor, der tangentiell zur Kurve gerichtet ist und dessen Betrag gleich Δs ist.

Es ist daher

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t}_1 \tag{5}$$

ein Einheitsvektor, der die Richtung der Tangente in dem betreffenden Kurvenpunkte anzeigt.

Welches ist nun die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}$? Der Vektor $\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}$ liegt in der durch $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$ gelegten Ebene, d. h. in der Schmiegungsebene der Kurve. Da der Betrag von $\mathfrak{t}_1$ stets gleich 1 ist, so steht der Vektor $d\mathfrak{t}_1$ senkrecht auf $\mathfrak{t}_1$, seine Richtung weist parallel der vom Kurvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gezogenen Hauptnormalen. Der Betrag von

$d\mathfrak{t}_1$ ist gleich dem Betrage von $\mathfrak{t}_1$ mal dem Kontingenzwinkel $d\varphi$, also einfach gleich $d\varphi$. Folglich ist der Betrag von $\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}$ gleich $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$, wo R den Krümmungsradius der Kurve angibt. Bezeichnet $\mathfrak{N}_1$ einen nach dem Krümmungsmittelpunkte hin weisenden Einheitsvektor, so ist

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} = \frac{\mathfrak{N}_1}{R} \tag{6}$$

zu setzen.

Betrachten wir einen materiellen Punkt, der sich längs der Raumkurve bewegt, so können wir die Zeit t als unabhängige Veränderliche wählen. Der erste Differentialquotient des Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Zeit

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathfrak{t}_1 \cdot \frac{ds}{dt} \tag{7}$$

definiert den Geschwindigkeitsvektor des bewegten Punktes. Er weist parallel der Tangente der Bahn, sein Betrag ist gleich $\frac{ds}{dt}$.

Nochmaliges Differentiieren nach der Zeit ergibt den Beschleunigungsvektor:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2}$$

oder nach Gleichung 6:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{N}_1 \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{8}$$

Diese Gleichung stellt den Beschleunigungsvektor dar als geometrische Summe zweier Vektoren; der erste ist parallel der Hauptnormalen der Bahnkurve gerichtet und seinem Betrage nach gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividiert durch den Krümmungsradius; der zweite weist parallel der Bahntangente, sein Betrag ist gleich der zeitlichen Änderung des Betrages der Geschwindigkeit. Diese Zerlegung der Beschleunigung in Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung ergibt sich durch Vektorrechnung in überaus einfacher Weise.

§ 4. Die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Komponenten eines Vektors.

Ein Vektor kann in mannigfacher Weise als Summe anderer Vektoren dargestellt werden. Die soeben vorgenommene Zerlegung bezog sich auf Richtungen, die für verschiedene Kurvenpunkte im allgemeinen verschieden sind. Es ist oft zweckmäßig, drei feste Richtungen im Raume zu wählen und nach diesen einen jeden Vektor zu zerlegen. Man wählt meistens drei wechselseitig aufeinander senkrechte Richtungen; die Einheitsvektoren, welche diese Richtungen festlegen, nennt man die Grundvektoren und schreibt sie $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Die Gleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z \mathfrak{k} \tag{9}$$

stellt den Vektor $\mathfrak{a}$ als Summe dreier Vektoren $\mathfrak{a}_x\mathfrak{i}$, $\mathfrak{a}_y\mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}_z\mathfrak{k}$ dar, die den Grundvektoren gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, je nachdem die Skalaren $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ positive oder negative Werte besitzen. Diese Skalaren bezeichnet man als Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$, die Zerlegung als Komponentenzerlegung. Die Grundvektoren entsprechen den Koordinatenachsen, die Komponentenzerlegung entspricht der Koordinatenmethode der analytischen Geometrie; sie führt die Vektoralgebra auf die Algebra der Skalaren zurück. So wichtig auch diese Methode ist, so ist doch stets zu beachten, daß sie in die vektoriellen Begriffe ein fremdes und willkürliches Element einführt.

Bekanntlich gibt es zwei Arten von Achsensystemen x, y, z, die man als Rechtssysteme und Linkssysteme unterscheidet; alle Rechtssysteme lassen sich miteinander zur Deckung bringen und ebenso alle Linkssysteme miteinander, aber nicht die Rechtssysteme mit den Linkssystemen. Durch Spiegelung an einer der Koordinatenebenen entsteht aus einem Rechtssystem ein Linkssystem, aus einem Linkssystem ein Rechtssystem. Auch durch Spiegelung am Anfangspunkt der Koordinaten (Umkehrung der drei Achsenrichtungen) wird aus einem Rechtssystem ein Linkssystem, aus einem Linkssystem ein Rechtssystem. Wir werden uns bei der Komponentenzerlegung stets des von Maxwell

(und den englischen Gelehrten überhaupt) gewählten Rechtssystemes bedienen.

Durch Abbildung 4 wird dieses in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Die xyz-Achsen, in die zugleich die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ fallen, folgen so aufeinander, daß eine Drehung aus der x-Richtung in die y-Richtung, verbunden mit einer fortschreitenden Bewegung in der z-Richtung, zu einer rechtsgängigen Schraube führt; die xyz-Richtungen eines Rechtssystemes können durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand angezeigt werden.

Um die durch Gleichung 9 formulierte Zerlegung auszuführen, projiziere man (Abb. 4) zunächst den Vektor $\mathfrak{a}$ auf die xy-Ebene und die Projektion wiederum auf die x-Achse und die y-Achse. Schreitet man längs der x-Achse um die Strecke $\mathfrak{a}_x$, sodann parallel der y-Achse um $\mathfrak{a}_y$, endlich parallel der z-Achse um $\mathfrak{a}_z$ fort, so gelangt man zum Endpunkte des Vektors $\mathfrak{a}$.

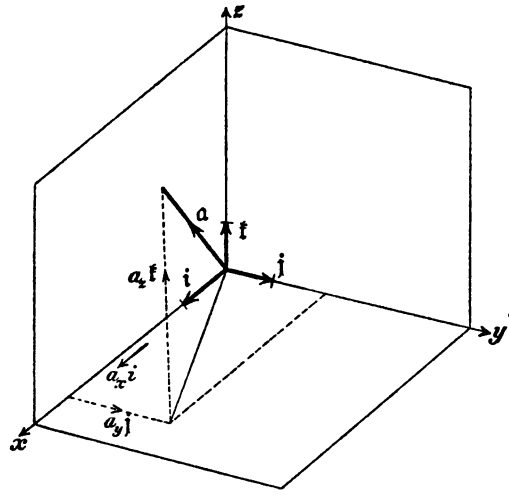


Abb. 4.

Die Komponenten sind eindeutig bestimmt durch die Gleichungen

$$(10)\quad \mathfrak{a}_x = |\mathfrak{a}|\cos(\mathfrak{a}, x),\quad \mathfrak{a}_y = |\mathfrak{a}|\cos(\mathfrak{a}, y),\quad \mathfrak{a}_z = |\mathfrak{a}|\cos(\mathfrak{a}, z).$$

Umgekehrt ist durch Angabe der drei Komponenten der Vektor $\mathfrak{a}$ eindeutig festgelegt als Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Kanten die Vektoren $\mathfrak{a}_x\mathfrak{i}$, $\mathfrak{a}_y\mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}_z\mathfrak{k}$ sind; sein Betrag ist

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2}, \tag{11}$$

seine Richtung bestimmen die Gleichungen 10.

Die Komponenten der geometrischen Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man, indem man die Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ algebraisch summiert; ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{C}_x = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x$ usf. Das leuchtet sofort ein, wenn man die Verrückungen, welche den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entsprechen, gemäß § 2 aneinander reiht und dabei die Projektion des beweglichen Punktes auf die x-Achse verfolgt.

Es gilt sogar der allgemeinere Satz: Die Komponente der geometrischen Summe einer beliebigen Zahl von Vektoren nach irgendeiner festen Richtung ist gleich der algebraischen Summe der Komponenten der einzelnen Vektoren nach dieser Richtung.

Dieser Satz gestattet es, die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ auf neue Achsensysteme umzurechnen. Es sei $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ ein neues System von Grundvektoren; dasselbe sei mit dem ursprünglichen Systeme durch die Gleichungen verknüpft

$$\begin{cases} \mathfrak{i}' = \alpha_1 \mathfrak{i} + \alpha_2 \mathfrak{j} + \alpha_3 \mathfrak{k} \\ \mathfrak{j}' = \beta_1 \mathfrak{i} + \beta_2 \mathfrak{j} + \beta_3 \mathfrak{k} \\ \mathfrak{k}' = \gamma_1 \mathfrak{i} + \gamma_2 \mathfrak{j} + \gamma_3 \mathfrak{k} \end{cases} \tag{12}$$

	x	y	z
x'	α_1	α_2	α_3
y'	β_1	β_2	β_3
z'	γ_1	γ_2	γ_3

Die Koeffizienten des Gleichungssystemes (12) sind die Kosinus der Winkel, welche die neuen Achsen x', y', z' mit den alten x, y, z einschließen; diese 9 Richtungskosinus sind in der beigefügten Tabelle zusammengestellt. Es seien $\mathfrak{a}_{x'}, \mathfrak{a}_{y'}, \mathfrak{a}_{z'}$ die Komponenten von $\mathfrak{a}$, bezogen auf die neuen Achsen; sie werden erhalten, indem man die Vektoren $\mathfrak{a}_x\mathfrak{i}, \mathfrak{a}_y\mathfrak{j}, \mathfrak{a}_z\mathfrak{k}$ einzeln auf die neuen Achsen x', y', z' projiziert und die entsprechenden Komponenten addiert,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{x'} &= \alpha_1 \mathfrak{a}_x + \alpha_2 \mathfrak{a}_y + \alpha_3 \mathfrak{a}_z, \\ \mathfrak{a}_{y'} &= \beta_1 \mathfrak{a}_x + \beta_2 \mathfrak{a}_y + \beta_3 \mathfrak{a}_z, \\ \mathfrak{a}_{z'} &= \gamma_1 \mathfrak{a}_x + \gamma_2 \mathfrak{a}_y + \gamma_3 \mathfrak{a}_z. \end{aligned} \tag{13}$$

Zerlegt man anderseits $\mathfrak{a}$ in die Vektoren $\mathfrak{a}_{x'}\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{a}_{y'}\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{a}_{z'}\mathfrak{k}'$ und addiert die Projektionen auf die alten Achsen x, y, z, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_x &= \alpha_1 \mathfrak{a}_{x'} + \beta_1 \mathfrak{a}_{y'} + \gamma_1 \mathfrak{a}_{z'}, \\ \mathfrak{a}_y &= \alpha_2 \mathfrak{a}_{x'} + \beta_2 \mathfrak{a}_{y'} + \gamma_2 \mathfrak{a}_{z'}, \\ \mathfrak{a}_z &= \alpha_3 \mathfrak{a}_{x'} + \beta_3 \mathfrak{a}_{y'} + \gamma_3 \mathfrak{a}_{z'}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die 9 Richtungskosinus, die in diesen Formeln auftreten, sind natürlich nicht unabhängig voneinander (vgl. § 6).

§ 5. Das innere (skalare) Produkt.

Die Bewegungsgleichung eines freien materiellen Punktes von der Masse m lautet

$$m \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K}. \tag{15}$$

Der Vektor $\mathfrak{K} = \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{K}_h$ stellt die Resultierende aller an dem beweglichen Punkte angreifenden Kräfte dar. Der Satz vom Kräfteparallelogramm besagt, daß die Zusammensetzung der einzelnen Kräfte nach den Regeln der Vektoraddition zu geschehen hat. Dieser Satz ist natürlich a priori ebensowenig durch Vektorrechnung wie durch gewöhnliche Analysis und Algebra beweisbar, er ist ein Erfahrungssatz.

Nach Gleichung (8) ist

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \mathfrak{K}_s$$

die tangentielle Komponente der Kraft $\mathfrak{K}$. Wir multiplizieren mit $\frac{ds}{dt}$, setzen $\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = T$ für die lebendige Kraft des materiellen Punktes und erhalten

$$\frac{dT}{dt} = \mathfrak{K}_s \cdot \frac{ds}{dt} = |\mathfrak{K}| \cdot |\mathfrak{v}| \cdot \cos(\mathfrak{K}, \mathfrak{v}). \tag{16}$$

Hier steht links die zeitliche Zunahme der lebendigen Kraft, rechts die pro Zeiteinheit von der Kraft $\mathfrak{K}$ geleistete Arbeit; beides sind skalare Größen.

Wir bezeichnen nun das rechts stehende Produkt aus den Beträgen der Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{v}$ und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels

$$\mathfrak{K}\mathfrak{v} = |\mathfrak{K}| \cdot |\mathfrak{v}| \cdot \cos(\mathfrak{K}\mathfrak{v}) \tag{17}$$

als skalares oder (nach Graßmann) inneres Produkt der beiden Vektoren und übertragen diese Bezeichnung auf beliebige andere Vektoren.

Der Kosinus des Winkels zwischen den Richtungen der beiden Vektoren wird $+1$, wenn die beiden Vektoren gleich gerichtet, -1, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind; er wird Null, wenn sie einen rechten Winkel einschließen. Wendet man dies auf die Grundvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ an, so erhält man

$$\mathfrak{ij} = \mathfrak{jk} = \mathfrak{ki} = 0, \tag{18}$$

hingegen

$$\mathfrak{ii} = \mathfrak{jj} = \mathfrak{kk} = 1. \tag{19}$$

Das skalare Produkt bleibt, nach der Definitionsgleichung (17), ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Faktoren vertauscht. Die innere Multiplikation zweier Vektoren befolgt das kommutative Gesetz. Auch dem distributiven Gesetze gehorcht sie; es gilt

$$\mathfrak{b}\sum_{h=1}^{n}\mathfrak{K}_h = \sum_{h=1}^{n}\mathfrak{b}\mathfrak{K}_h. \tag{20}$$

Denn aus dem Satze des vorigen Paragraphen folgt, daß die in Richtung der Bahntangente genommene Komponente der resultierenden Kraft $\mathfrak{K}$ gleich der Summe der nach derselben Richtung genommenen Komponenten der Einzelkräfte $\mathfrak{K}_h$ ist; mithin ist die Arbeit der Resultierenden gleich der Summe der Arbeiten der Einzelkräfte, wie Gleichung (20) behauptet.

Die Gültigkeit des kommutativen und des distributiven Gesetzes bringt es mit sich, daß für das innere Produkt die Multiplikationsregeln der gewöhnlichen Algebra gelten. So erhält man z. B., wenn man das Produkt

$$\mathfrak{AB} = (\mathfrak{A}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{B}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{B}_z\mathfrak{k})$$

nach den gewöhnlichen Multiplikationsregeln ausrechnet und (18) und (19) berücksichtigt,

$$\mathfrak{AB} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z, \tag{21}$$

eine Formel, die gemäß der Definition des skalaren Produktes und der Gleichung (10) in die bekannte Formel der analytischen Geometrie

$$(22)\quad \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \cos(\mathfrak{A}x)\cos(\mathfrak{B}x) + \cos(\mathfrak{A}y)\cos(\mathfrak{B}y) + \\ + \cos(\mathfrak{A}z)\cos(\mathfrak{B}z)$$

übergeht.

Eine andere, einfache Anwendung des skalaren Produktes mag das Parallelogramm der Abb. 2 betreffen, dessen Seiten die Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, dessen Diagonalen die Vektoren $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ darstellen. Es ist

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2,$$
$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = 2\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}^2.$$

Da allgemein das Quadrat eines Vektors gleich dem Quadrate seines Betrages ist, so haben wir den Satz bewiesen, daß die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogrammes gleich der Summe der Quadrate über allen vier Seiten ist. Ferner gilt

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2 - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d. h. das skalare Produkt aus den Seiten eines Parallelogrammes ist gleich dem vierten Teile von der Differenz der Quadrate der Diagonalen.

Will man das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ nach der gemeinsamen unabhängigen Veränderlichen t differentiieren, so hat man den Grenzwert zu berechnen, dem der Quotient

$$\frac{(\mathfrak{A}+\Delta\mathfrak{A})\cdot(\mathfrak{B}+\Delta\mathfrak{B}) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\Delta t}$$

mit verschwindendem Δt zustrebt. Die Anwendung der Multiplikationsregeln ergibt

$$(23)\qquad \frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{dt} = \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}.$$

§ 6. Das äußere Produkt oder Vektorprodukt.

Die Verrückungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmen ein Parallelogramm (Abb. 5). Mit Graßmann nennen wir dasselbe „äußeres Produkt“ der beiden Verrückungen und schreiben es $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, indem wir die beiden Vektoren in eckige Klammern einschließen. Der Flächeninhalt des Parallelogrammes beträgt

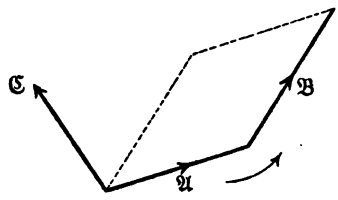


Abb. 5.

$$|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$$

seine Ebenenstellung ist durch die Richtungen, sein Umlaufssinn durch die Reihenfolge der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ festgelegt. Da wir Verrückungen als gleichwertig betrachten, falls sie nach Betrag und Richtung übereinstimmen, auch dann, wenn sie von verschiedenen Anfangslagen ausgehen, so gelten zwei derartige Parallelogramme als gleichwertig, wenn sie von beliebigen Punkten des Raumes aus in zwei parallelen Ebenen konstruiert sind. Wir wollen sie sogar auch dann noch als gleichwertig betrachten, wenn ihre Seitenlängen verschieden sind und sie nur nach Flächeninhalt, Ebenenstellung und Umlaufssinn übereinstimmen. Alsdann ordnen wir allen gleichwertigen Parallelogrammen eine einzige Verrückung zu durch folgende Festsetzung: der Betrag der Verrückung soll numerisch gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms sein, seine Richtung soll senkrecht zu der Ebene des Parallelogramms stehen, und dessen Umlaufssinne so zugeordnet sein, wie bei einer rechtsgängigen Schraube die Fortschreitungsrichtung dem Umlaufssinne zugeordnet ist. Es entsprechen also zwei gleichwertige Parallelogramme einer und derselben Verrückung, zwei verschiedenwertige entsprechen verschiedenen Verrückungen, umgekehrt ist durch Angabe der repräsentierenden Verrückung das Parallelogramm nach Betrag, Ebenenstellung und Umlaufssinn festgelegt, und zwar ändern sich diese Bestimmungsstücke in stetiger Weise mit Betrag und Richtung der Verrückung.

Nach der von uns zugrunde gelegten Definition des Vektors (§ 1) ist also das äußere Produkt zweier Vek-

toren selbst ein Vektor; es wird daher vielfach auch „vektorielles Produkt“ oder „Vektorprodukt“ genannt. Gerade darum haben wir die Definition des Vektors so allgemein gehalten, um auch solche geometrische und physikalische Größen, die nicht einen Fortschreitungssinn, sondern einen Umlaufs- oder Drehsinn besitzen, als Vektoren bezeichnen zu können.

Welche Bedeutung kommt nun den Komponenten des Vektors

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \tag{24}$$

zu? Die Komponenten von $\mathfrak{C}$ nach den Koordinatenachsen (xyz) sind numerisch gleich den Flächeninhalten der senkrechten Projektionen des Parallelogramms auf die yz-, zx-, xy-Ebene, ihr Vorzeichen legt den Umlaufssinn dieser Projektionen fest.

Ändert man die Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukte, so kehrt sich nach unseren Festsetzungen der Umlaufssinn des Parallelogramms, mithin die Richtung der zugeordneten Verrückung um. Es gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]. \tag{25}$$

Die äußere Multiplikation befolgt nicht das kommutative Gesetz.

Dagegen bleibt das distributive Gesetz auch für die Vektorprodukte gültig. Es ist

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]. \tag{26}$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setze man $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und konstruiere das Parallelogramm, dessen Seiten den Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen Diagonale dem Vektor $\mathfrak{E}$ entspricht. Man projiziere es auf die zu $\mathfrak{C}$ senkrechte Ebene; man erhält so wiederum ein Parallelogramm mit den Seiten $|\mathfrak{A}| \cdot \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$, $|\mathfrak{B}| \cdot \sin(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und der Diagonale $|\mathfrak{E}| \cdot \sin(\mathfrak{E}\mathfrak{C})$. Dieses Parallelogramm vergrößere man im Verhältnis $|\mathfrak{C}| : 1$ und drehe es in seiner Ebene um einen rechten Winkel. Alsdann stellen die Seiten die äußeren Produkte $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ dar, die

Diagonale aber das äußere Produkt $[\mathfrak{C}\mathfrak{C}]$; dieses letztere ist mithin die geometrische Summe der beiden ersteren, wie die Gleichung (26) behauptet.

Man darf also bei der Ausrechnung der Vektorprodukte die Regeln der gewöhnlichen Algebra anwenden, mit der Einschränkung, daß bei der Vertauschung der Reihenfolge zweier Vektoren das Vorzeichen des Produktes umzukehren ist.

Die Vektorprodukte der Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sind

$$(27)\qquad \begin{cases} [\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}, & [\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}, & [\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = \mathfrak{j}; \\ [\mathfrak{j}\mathfrak{i}] = -\mathfrak{k}, & [\mathfrak{k}\mathfrak{j}] = -\mathfrak{i}, & [\mathfrak{i}\mathfrak{k}] = -\mathfrak{j}; \\ [\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0. \end{cases}$$

Mithin gilt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [(\mathfrak{A}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{A}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{A}_z\mathfrak{k})(\mathfrak{B}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{B}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{B}_z\mathfrak{k})]$$
$$= \mathfrak{i}(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y) + \mathfrak{j}(\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z) + \mathfrak{k}(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x).$$

In Determinantenform läßt sich diese Gleichung wie folgt schreiben

$$(28)\qquad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z$, $\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x$ sind die Komponenten des Vektorproduktes, d. h. die Projektionen des Parallelogramms $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ auf die Koordinatenebenen.

Für die Differentiierung des Vektorproduktes nach einer skalaren Variabeln t gilt die Rechnungsregel

$$(29)\qquad \frac{d}{dt}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B}\right].$$

Wir betrachteten in § 4 zwei Systeme von Grundvektoren $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$, die durch die Gleichung (12) verknüpft waren.

Wir erhalten Beziehungen zwischen den Koeffizienten dieser Gleichungen, indem wir die Regeln 18, 19 der inneren und die Regeln 27 der äußeren Multiplikation von Grundvektoren anwenden.

Die Regeln 18 ergeben 6 Gleichungen, von denen es genügt, die beiden folgenden zu schreiben.

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0; \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Die Regeln 19 liefern gleichfalls 6 Beziehungen von der Form

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \text{ usf.}$$

Aus den Regeln 27 aber folgt $[\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'] = \mathfrak{i}'$, und wenn wir die $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ durch die $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ausdrücken

$$\begin{aligned}&\mathfrak{i}(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \mathfrak{j}(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \mathfrak{k}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\\ &\quad = \alpha_1\mathfrak{i} + \beta_1\mathfrak{j} + \gamma_1\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Die Gleichung zerfällt in die drei folgenden

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2; \quad \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3; \quad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1.$$

Zu diesen Gleichungen kommen die durch zyklische Vertauschung der α, β, γ entstehenden. Ferner folgt, mit Rücksicht auf die Beziehung $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, für die Determinante der 9 Winkelkosinus

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Diese Beziehungen gelten nur dann, wenn das System $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ wie das der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ein Rechtssystem ist. Wäre es ein Linkssystem, so würde $[\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'] = -\mathfrak{k}'$, $[\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'] = -\mathfrak{i}'$ sein und es würde die Determinante der 9 Winkelkosinus den Wert -1 annehmen.

§ 7. Produkte dreier Vektoren.

Da wir weiterhin die eckigen Klammern zur Kennzeichnung der Vektorprodukte verwenden, so werden wir runde Klammern benutzen, wenn wir zwei skalar zu multiplizierende Vektoren von den übrigen trennen wollen. Produkte dreier Vektoren kann man in drei verschiedenen Weisen ableiten.

I. Produkt aus einem Vektor und dem skalaren Produkte zweier anderer Vektoren: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$. Da $(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ein Skalar ist, so ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ ein zu $\mathfrak{A}$ paralleler Vektor. Hieraus erhellt, daß z. B. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ ein von dem vorigen völlig verschiedener Vektor ist.

II. Skalares Produkt aus einem Vektor und dem vektoriellen Produkte zweier anderer Vektoren: $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

Hier gilt die wichtige Relation

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]. \tag{30}$$

Es stellt nämlich jeder dieser Ausdrücke den Rauminhalt des aus den Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelepipeds dar.

Um sich hiervon zu überzeugen, beachte man, daß der Betrag von $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ dem Flächeninhalt der durch die Kanten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildeten Seitenfläche des Parallelepipeds gleich ist; die Richtung von $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht senkrecht auf diesem Parallelogramm, und zwar weist sie nach derselben Seite, wie $\mathfrak{A}$, vorausgesetzt, daß die Aufeinanderfolge der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu einem Rechtssystem führt. In diesem Falle erhalten wir das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, indem wir den Flächeninhalt jener Seitenfläche mit der Länge des vom Endpunkte der Kante $\mathfrak{A}$ auf sie gefällten Lotes multiplizieren. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ in der Tat den Inhalt des Parallelepipeds angibt, und zwar mit positivem Vorzeichen, wenn die Aufeinanderfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem, mit negativem Vorzeichen, wenn sie ein Linkssystem bildet.

Es folgt gleichzeitig, daß die Beziehungen (30) erfüllt sind, indem für jedes der beiden anderen Produkte dieselben Schlüsse gelten, und weil die Folge $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleichfalls zu Rechtssystemen führt, wenn dies für $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zutrifft.

Der Ausdruck der drei Produkte durch die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist nach (21) und (28)

$$\mathfrak{A}\cdot[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix}. \tag{31}$$

III. Vektorprodukt aus einem Vektor und dem Vektorprodukte zweier anderer Vektoren: $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{F}$.

Der Vektor $\mathfrak{F}$ liegt in der Ebene, die durch die Vektoren $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ bestimmt ist, und zwar senkrecht zur Projektion von $\mathfrak{A}$ auf diese Ebene. Denn der Vektor $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht senkrecht zu jener Ebene, und $\mathfrak{F}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{A}$ und auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

Die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{F}$ ist nach (28)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{A}_y(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x) - \mathfrak{A}_z(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z);$$

wir ordnen folgendermaßen

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}_x\mathfrak{C}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{C}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_z) - \mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_z),$$

oder nach (21)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B});$$

entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Komponenten; wir fassen sie zu der Vektorgleichung zusammen

$$(32) \qquad \big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Hierdurch ist ein Produkt der dritten Art auf zwei Produkte der ersten Art zurückgeführt. Mit Hilfe dieser Beziehung findet man auch leicht

$$(32a) \qquad \big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] + \big[\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]\big] + \big[\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big] = 0,$$

indem man die Glieder nach (32) entwickelt.

Endlich berechne man das skalare Produkt aus zwei Vektorprodukten $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$.

Dieses ist ein Produkt der zweiten Art, in dem der erste Vektor durch das Vektorprodukt zweier anderer ersetzt ist; wir wenden die Regel (31) an und erhalten

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = \mathfrak{C}\big[\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big].$$

Da nun nach Regel (32)

$$\big[\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big] = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

zu setzen ist, so folgt

$$(33) \qquad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D}).$$

§ 8.

Polare und axiale Vektoren. Skalare und Pseudoskalare.

Obwohl man dem Vektorprodukte zweier Verrückungen in umkehrbar eindeutiger Weise eine Verrückung zuordnen kann, so besteht doch zwischen dem mit Umlaufssinn begabten Parallelogramme und der ihm zugeordneten, mit einem Fortschreitungssinne versehenen Strecke (Abb. 5) ein gewisser Unterschied. Das Wesentliche dieses Unterschiedes erkennt man, wenn man das Parallelogramm [$\mathfrak{AB}$] an seiner eigenen Ebene spiegelt; der Umlaufssinn bleibt bei dieser Spiegelung ungeändert, die zugeordnete Verrückung hingegen kehrt ihre Richtung um. Hiermit hängt es zusammen, daß wir zur eindeutigen Bestimmung der zugeordneten Verrückung einer rechtsgängigen Schraube bedurften; bei der Spiegelung wird diese zu einer linksgängigen, in dem gespiegelten Systeme entspricht mithin die Fortschreitungsrichtung dem Umlaufssinne wie bei einer linksgängigen Schraube.

Die geradlinige Verrückung und das Vektorprodukt zweier solcher sind die Repräsentanten zweier Arten von Vektoren, die wir als polare und axiale Vektoren unterscheiden. Ein Vektor der zweiten Art ist beispielsweise die Drehgeschwindigkeit des in einem Punkte befestigten starren Körpers (§ 9). Diese Unterscheidung ist insbesondere für die Elektrizitätslehre wichtig, wie schon Maxwell betonte; er vermutete bereits, daß der magnetische Vektor den axialen, der elektrische den polaren Vektoren angehöre.

Rechnet man mit Komponenten, so kommt der Unterschied der beiden Arten von Vektoren nicht zur Geltung, solange man ausschließlich ein Rechtssystem zugrunde legt. Geht man aber zu einem Linkssystem über, indem man etwa die Richtungen der drei Grundvektoren umkehrt, so wechseln die Komponenten eines polaren Vektors das Vorzeichen, diejenigen eines axialen Vektors hingegen behalten es bei, da der durch die Reihenfolge der Grundvektoren festgelegte Umlaufssinn in den Koordinatenebenen der gleiche bleibt. So kommt

es, daß in Gleichungen, welche Komponenten beider Arten von Vektoren zueinander in Beziehung setzen, Vorzeichenwechsel vorzunehmen sind, sobald man ein Rechtssystem mit einem Linkssystem vertauscht. Für solche Fälle ist es nützlich, folgende Regel anzumerken:

Das Vektorprodukt zweier polarer und ebenso das zweier axialer Vektoren ist ein axialer, das Vektorprodukt eines polaren und eines axialen Vektors ist ein polarer Vektor.

Wie steht es nun mit dem skalaren Produkte eines polaren und eines axialen Vektors? Ein solches wurde im vorigen Paragraphen betrachtet (Gleichung 30, 31) und als Rauminhalt des durch drei polare Vektoren bestimmten Parallelepipeds gedeutet; es wurde bemerkt, daß das Vorzeichen des Produktes positiv oder negativ sein kann. Wir können jetzt hinzufügen, daß das Vorzeichen zu wechseln ist, wenn man von einem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme übergeht.

Wir werden so dazu geführt, auch bei den Skalaren zwei Arten zu unterscheiden, die wir als Skalare erster und zweiter Art, oder als Skalare schlechtweg und Pseudoskalare unterscheiden. Zu der ersten Art gehören alle diejenigen Skalaren, die nicht bloße Rechnungsgrößen sind, sondern die Mengen wirklicher Substanzen messen, so z. B. Masse, Energie; denn diese werden bei Veränderung des Koordinatensystemes das Vorzeichen nicht ändern. Als Rechnungsgrößen hingegen treten auch Pseudoskalare in der mathematischen Physik auf.

Durch Multiplikation mit einem Pseudoskalar wird der polare Vektor zum axialen, der axiale zum polaren.

§ 9. Bewegung starrer Körper.

Es wird sich als nützlich erweisen, die Begriffe der Vektoralgebra zunächst an einigen, der Mechanik starrer Körper entnommenen Beispielen zu erläutern, zumal dabei Dinge zur Sprache kommen, die weiterhin in der Elektrodynamik von Wichtigkeit werden.

Ein starrer Körper sei in einem Punkte O festgehalten, er rotiere um eine Achse ON (Abb. 6). Wir tragen von O aus auf dieser Achse eine Strecke ab, deren Länge den Betrag der Winkelgeschwindigkeit anzeigt, und zwar nach derjenigen Richtung, die der Drehbewegung sich zuordnet wie die Fortschreitungsrichtung dem Drehsinne bei einer rechtshändigen Schraubenbewegung. Durch diese Festsetzung ist der Rotationsbewegung ein Vektor $\mathfrak{u}$ zugeordnet. Ist ferner $\mathfrak{r}$ der von O aus nach irgend einem Punkte P des starren Körpers gezogene Radiusvektor, so ist offenbar dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

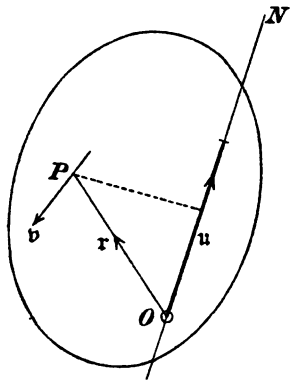


Abb. 6.

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]. \tag{34}$$

In der Tat, der Punkt P bewegt sich senkrecht zu der durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{u}$ gelegten Ebene; der Pfeil, der die Richtung von $\mathfrak{v}$ anzeigt, ist, wie die Figur lehrt, so gerichtet, wie das Vektorprodukt. Dem Betrage nach finden wir $\mathfrak{v}$ durch Fällen eines Perpendikels von P auf die Drehachse und Multiplikation desselben mit der Winkelgeschwindigkeit; das gibt aber genau den Betrag $|\mathfrak{u}| \cdot |\mathfrak{r}| \cdot \sin(\mathfrak{u}\mathfrak{r})$ des Vektorproduktes, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus dem durch Gleichung (34) ausgesprochenen Satze folgt sofort die Art der Zusammensetzung mehrerer Drehgeschwindigkeiten, deren Achsen alle durch denselben festen Punkt O gehen. Man hat, wenn $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ ... die Drehgeschwindigkeiten und $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ ... die durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeiten des willkürlichen Punktes P des starren Körpers angeben, für die resultierende Geschwindigkeit von P den Ausdruck

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'' + \cdots = [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}] + [\mathfrak{u}''\mathfrak{r}] + \cdots = [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}],$$

wo $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}'' + \ldots$ eine Drehgeschwindigkeit um eine gleichfalls durch O gehende Achse darstellt, die sich aus den

einzelnen Drehgeschwindigkeiten $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ ... nach den Regeln der Vektoraddition zusammensetzt.

Ist der Punkt O nicht fest, sondern bewegt er sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ im Raume, so wird die Geschwindigkeit der Punkte des starren Körpers gegeben durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]. \tag{35}$$

Man erhält den allgemeinsten Bewegungszustand des starren Körpers, wenn man die Vektoren $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{u}$ der Translations- und Rotationsgeschwindigkeit beliebig läßt.

Die Zerlegung in eine translatorische und eine rotatorische Bewegung hängt offenbar von der Wahl des Bezugspunktes ab; wählen wir statt O einen anderen Bezugspunkt O', so stellt sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ dar als Resultierende der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0'$ des neuen Bezugspunktes O' und der durch die Rotation $\mathfrak{u}'$ um eine durch O' gehende Achse hervorgebrachten Geschwindigkeit; es gilt neben (35) die Gleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}'], \tag{35a}$$

wo $\mathfrak{r}'$ den von O' nach dem Punkte P gezogenen Radiusvektor darstellt. Ist weiter $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ der Radiusvektor OO', so ist nach (35)

$$\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{a}] \tag{36}$$

die Geschwindigkeit des neuen Bezugspunktes. Setzt man dies in die Gleichung (35) ein, so erhält man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}, \mathfrak{r} - \mathfrak{a}] = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}'],$$

und es wird die in (35a) noch unbestimmt gelassene Geschwindigkeit $\mathfrak{u}'$ der Drehung um O'

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}. \tag{37}$$

Bei Verlegung des Bezugspunktes bleibt mithin der Vektor der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ stets der gleiche, der Vektor $\mathfrak{v}_0$ der translatorischen Geschwindigkeit nur dann, wenn der Bezugspunkt parallel dem Vektor $\mathfrak{u}$ verschoben wird. Im allgemeinen ändert er sich bei Verlegung des Bezugs-

punktes gemäß (36). Es kommt eine zu $\mathfrak{u}$ senkrechte Geschwindigkeit dazu.

War für den Bezugspunkt O speziell $\mathfrak{v}_0$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$, so kann man den neuen Bezugspunkt O' immer so wählen, daß $\mathfrak{v}_0 = -[\mathfrak{u}\mathfrak{a}]$ wird. Die von O' aus betrachtete Bewegung stellt sich alsdann als reine Rotation dar.

Im anderen Falle, wenn der Vektor $\mathfrak{v}_0$ nicht zu $\mathfrak{u}$ senkrecht steht, kann man ihn durch geeignete Wahl von $\mathfrak{a}$ in zwei Vektoren zerlegen: $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_1 - [\mathfrak{u}\mathfrak{a}]$, von denen der erste zu $\mathfrak{u}$ parallel, der zweite zu $\mathfrak{u}$ senkrecht ist. Verlegt man den Bezugspunkt O' nach dem Endpunkte von $\mathfrak{a}$, oder nach irgend einem Punkte der durch den Endpunkt von $\mathfrak{a}$ gehenden, zu $\mathfrak{u}$ parallelen Geraden, so kann man die Bewegung als Schraubenbewegung auffassen. Die Geschwindigkeit von O' wird nämlich, nach (36), $\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_1$, und die Drehbewegung um O' wird durch den zu $\mathfrak{v}_1$ parallelen Vektor $\mathfrak{u}$ bestimmt. Dabei hängt es von dem Vorzeichen (+ oder −) des skalaren Produktes $\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{u}$ ab, ob die Schraubenbewegung eine rechtshändige oder eine linkshändige ist.

Der Vektor $\mathfrak{u}$ ist ein axialer Vektor; das folgt aus Gleichung (34), welche den polaren Vektor $\mathfrak{v}$ als Vektorprodukt von $\mathfrak{u}$ und dem polaren Vektor $\mathfrak{r}$ darstellt, gemäß dem Satze des § 8; bei der Festlegung eines dem Vektor $\mathfrak{u}$ zugehörigen Fortschreitungssinnes konnten wir in der Tat nicht umhin, von einer rechtsgängigen Schraube zu reden.

Die axiale Natur von $\mathfrak{u}$ geht auch daraus hervor, daß die Drehbewegung ungeändert bleibt, wenn wir sie an einer zur Drehachse senkrechten Ebene spiegeln.

Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers ist bestimmt durch zwei Vektoren, einen polaren $\mathfrak{v}_0$ und einen axialen $\mathfrak{u}$, die beide von demselben Punkte aus zu konstruieren sind. Der Pseudoskalar $\mathfrak{v}_0\mathfrak{u}$, der einen Schraubungssinn festlegt, ist ein typischer Repräsentant dieser Größenklasse. Er ist positiv oder negativ, je nachdem die Schraubenbewegung ihrer Art nach mit der bei der eindeutigen Festlegung von $\mathfrak{u}$ verwandten übereinstimmt oder nicht. Da wir uns bei der

Zuordnung des Vektors $\mathfrak{u}$ einer Rechtsschraube bedient haben, so ist jener Pseudoskalar positiv für solche Bewegungen des starren Körpers, die sich durch eine Rechtsschraube, negativ für solche, die sich durch eine Linksschraube darstellen lassen. Umgekehrt wäre sein Vorzeichen zu wählen, wenn wir der Drehbewegung den Vektor $\mathfrak{u}$ durch eine Linksschraube zugeordnet hätten.

§ 10. Prinzip der virtuellen Arbeit und Satz der statischen Momente.

An den Punkten eines starren Körpers mögen die Kräfte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots \mathfrak{K}_n$ angreifen. Um zu beurteilen, ob Gleichgewicht besteht, denke man sich von der betreffenden Lage aus eine Bewegung vorgenommen. Diese Bewegung wird in Wirklichkeit nur dann eintreten können, wenn die algebraische Summe der Arbeiten, die von den einzelnen Kräften dabei geleistet werden, positiv ist; denn nur dann ist der Zuwachs an lebendiger Kraft, der den Übergang von Ruhe zur Bewegung begleitet, mit dem Energieprinzip verträglich. Genügt keine der kinematisch möglichen Bewegungen jener Bedingung, so wird der Körper in Ruhe bleiben; die allgemeinste Gleichgewichtsbedingung verlangt daher, daß bei allen kinematisch möglichen (virtuellen) Bewegungen die Arbeit der angreifenden Kräfte negativ oder Null ist.

Hat man es insbesondere mit einem Systeme zu tun, in dem zu einer jeden Bewegung auch die entgegengesetzte kinematisch möglich ist, so würde negativer Arbeit bei jener positive bei dieser entsprechen. Hier nimmt die Gleichgewichtsbedingung die Form an

$$\frac{dA}{dt} = \sum_1^n (\mathfrak{K}\mathfrak{v}) = 0 \tag{38}$$

für alle virtuellen Bewegungen. Diese für das Gleichgewicht notwendige und hinreichende Bedingung spricht das „Prinzip der virtuellen Arbeit“ aus.

Für unseren starren Körper ist die allgemeinste Bewegung durch (35) gegeben. Wir erhalten daher

$$\frac{dA}{dt} = \mathfrak{v}_0 \cdot \sum_1^n \mathfrak{K} + \sum_1^n \mathfrak{K} \cdot [\mathfrak{u}\mathfrak{r}];$$

indem wir das zweite Glied nach Regel (30) umformen, formulieren wir die Gleichgewichtsbedingung folgendermaßen

$$\frac{dA}{dt} = \mathfrak{v}_0 \cdot \sum_1^n \mathfrak{K} + \mathfrak{u} \cdot \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = 0 \tag{39}$$

für beliebige Werte der Translations- und Rotationsgeschwindigkeit. Diese Forderung ist offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn sowohl

$$\sum_1^n \mathfrak{K} = 0,$$

als auch

$$\sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = 0. \tag{40}$$

Die erste Gleichung verlangt, daß die geometrische Summe aller Kräfte verschwindet; in der zweiten bedeutet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von dem Bezugspunkte O nach dem Angriffspunkte der betreffenden Kraft gezogen ist; wir können ihn als Hebelarm der Kraft $\mathfrak{K}$ bezeichnen und das Vektorprodukt aus Hebelarm und Kraft als statisches Moment der Kraft. Wir fassen also das statische Moment als Vektorgröße auf, und zwar als axialen Vektor, weil es einen Umlaufssinn in einer Ebene anzeigt, und sprechen die Gleichung (40) so aus: Die Vektorsumme der statischen Momente der einzelnen Kräfte für den gegebenen Momentenpunkt soll gleich Null sein. Diese vektorielle Auffassung des Momentensatzes besitzt manche Vorzüge vor der sonst gebräuchlichen, welche für die Komponenten der Momente nach drei senkrechten Achsen einzeln die Gleichgewichtsbedingung aufstellt.

Geht man zu einem neuen Bezugspunkt O' über, dessen Lage relativ zu O durch $\mathfrak{a}$ gegeben ist, so ist die Resultierende der

Kräfte $\sum_1^n \mathfrak{K}$ offenbar die gleiche. Hingegen ist das resultierende Moment jetzt $\sum_1^n [\mathfrak{r}'\mathfrak{K}]$, wo $\mathfrak{r}'$ den von O' als Momentenpunkt ausgehenden Hebelarm bezeichnet. Da allgemein $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}'$ gilt, so wird das resultierende Moment für O

$$(41) \qquad \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = \left[\mathfrak{a}, \sum_1^n \mathfrak{K}\right] + \sum_1^n [\mathfrak{r}'\mathfrak{K}].$$

Das Moment für O wird demnach erhalten, indem zu dem Moment für O' das Moment der in O' angreifenden Resultierenden $\sum_1^n \mathfrak{K}$ in bezug auf O hinzugefügt wird.

Das allgemeinste, an einem starren Körper angreifende Kräftesystem läßt sich durch Angabe zweier Vektoren, eines polaren, der Kraft, und eines axialen, des Momentes, für einen gegebenen Momentenpunkt darstellen. Der polare Vektor, die Kraft, spielt in der Statik die entsprechende Rolle, wie in der Kinematik der axiale Vektor $\mathfrak{u}$ der Rotationsgeschwindigkeit, insofern, als er bei Verlegung des Bezugspunktes ungeändert bleibt; der axiale Vektor hingegen, das Moment, entspricht dem polaren Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_0$, indem er bei Verlegung des Bezugspunktes im allgemeinen seinen Wert ändert. Ebenso wie der Vektor $\mathfrak{u}$ längs seiner Richtung verschoben werden konnte, ohne $\mathfrak{v}_0$ zu ändern, so kann die Kraft längs ihrer eigenen Richtung verschoben werden, ohne ein neues Moment zu ergeben. Und wie die allgemeinste Bewegung des starren Körpers sich bei geeigneter Wahl der Drehachse als Schraubenbewegung darstellte, so ist das allgemeinste Kräftesystem, wenn man die Angriffslinie der Kraft passend wählt, aufzufassen als Kraft, kombiniert mit einem Moment um die Angriffslinie als Achse. Der Charakter der hierdurch bestimmten Schraube wird wiederum durch einen Pseudoskalar, nämlich das skalare Produkt aus Kraft und Moment angezeigt; positives Vorzeichen desselben entspricht der Rechts-, negatives

der Linksschraube. Wirkliche Skalare hingegen sind selbstverständlich die in den Ausdruck der Arbeit (39) eingehenden inneren Produkte aus Geschwindigkeit und Kraft, sowie aus Drehgeschwindigkeit und Moment.

§ 11. Stabilität des Gleichgewichtes.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit unterscheidet nicht zwischen stabilem und instabilem Gleichgewicht. Betrachten wir etwa ein homogen mit Masse erfülltes Ellipsoid, das auf einer horizontalen Ebene rollen kann. Berührt es in dem Endpunkte einer der drei Achsen die Ebene, so verschwindet das Moment aus der im Schwerpunkte angreifenden Schwerkraft und der ihr entgegengesetzt gleichen Reaktionskraft der Ebene. Dennoch liegen sehr verschiedene Fälle des Gleichgewichtes vor, je nachdem die große, die mittlere, oder die kleine Achse des Ellipsoids vertikal steht.

Man kann hier die Arbeit der äußeren Kräfte

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

setzen, wo U die potentielle Energie bezeichnet, die der Körper infolge der Schwerkraft besitzt. Es ist dann zwischen solchen Gleichgewichten zu unterscheiden, bei denen U ein Maximum, und solchen, bei denen es ein Minimum ist. Ist U in der zu betrachtenden Lage ein Maximum, so gebe man dem Körper einen kleinen Stoß; die lebendige Kraft, die der Körper durch den Stoß erhielt, wird im Verlaufe der Bewegung sich auf Kosten der potentiellen Energie vergrößern, und er wird mit wachsender Geschwindigkeit die Gleichgewichtslage verlassen. Ein solches Gleichgewicht ist demnach labil. Ist hingegen U ein Minimum, so vergrößert sich die potentielle Energie bei Entfernung aus der Gleichgewichtslage auf Kosten der lebendigen Kraft, und der Körper wird sich nur so weit bewegen können, bis die lebendige Kraft des Stoßes erschöpft ist. Je geringer die lebendige Kraft des Stoßes war, desto kleiner ist die erreichte Entfernung aus der Gleichgewichtslage. Dieses Gleichgewicht ist stabil.

Bei dem vorhin angeführten Beispiele ist die potentielle Energie proportional der Höhe des Schwerpunktes über einer beliebig festzusetzenden horizontalen Ebene. Die potentielle Energie ist ein absolutes Maximum, wenn das Ellipsoid im Endpunkte der großen Achse, ein absolutes Minimum, wenn es im Endpunkte der kleinen Achse die Ebene berührt. Im ersteren Falle ist das Gleichgewicht labil, im zweiten stabil. Fraglich kann nur im dritten Falle, wo die mittlere Achse vertikal steht, die Stabilität des Gleichgewichtes sein; hier nimmt die potentielle Energie bei einigen der möglichen Bewegungen zu, bei anderen nimmt sie ab. Da jedenfalls Stöße eintreten können, welche Bewegungen der letzteren Art einleiten, so wird auch in diesem Falle das Gleichgewicht labil zu nennen sein.

Artet das Ellipsoid in eine Kugel aus, so bleibt die potentielle Energie auch bei endlichen Bewegungen ungeändert. Alsdann liegt ein Fall des indifferenten Gleichgewichtes vor.

§ 12. D'Alemberts Prinzip. Die Impulssätze.

D'Alemberts Prinzip führt die Dynamik auf die Statik zurück. Es berücksichtigt den Einfluß der Massenträgheit in der Weise, daß es an jedem Massenpunkt außer der äußeren Kraft $\mathfrak{K}$ die „Trägheitskraft" $-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ angreifen läßt, und verlangt, daß äußere und Trägheitskräfte zusammen sich in jedem Augenblick das Gleichgewicht halten. Für den freien starren Körper besagt das: es sollen die resultierenden Kräfte und Momente verschwinden

$$\sum_1^n \left(\mathfrak{K} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = 0, \tag{42}$$

$$\sum_1^n \left[\mathfrak{r},\ \mathfrak{K} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = 0. \tag{43}$$

Dabei ist zu beachten, daß die statischen Momente auf einen im Raume festen Momentenpunkt O zu beziehen sind.

Es ist zweckmäßig, zwei neue Vektoren einzuführen. Der erste ist die Resultierende der Bewegungsgrößen aller Massenpunkte des Körpers

$$\mathfrak{B} = \sum_1^n m\mathfrak{v}, \tag{44}$$

der andere das resultierende Moment der Bewegungsgrößen

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n [\mathfrak{r}, m\mathfrak{v}]. \tag{45}$$

Diese Vektoren, von denen der erste polarer, der zweite axialer Art ist, bezeichnet man wohl auch kurz als „Impuls“ und „Drehimpuls“ oder „Impulsmoment“ des Körpers. Man bemerkt, daß in dem Differentialquotienten des Impulsmomentes $\mathfrak{U}$ nach der Zeit das von der Änderung der Hebelarme $\mathfrak{r}$ herrührende Glied

$$\sum_1^n \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, m\mathfrak{v}\right]$$

verschwindet, weil $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$ und das äußere Produkt daher Null ist; bei dieser Überlegung ist allerdings wesentlich, daß die Hebelarme $\mathfrak{r}$ von einem festen Momentenpunkte aus zu nehmen sind. Es wird in diesem Falle

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum_1^n \left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right],$$

und man kann daher (42), (43) durch folgende Gleichungen ersetzen

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \sum_1^n \mathfrak{K}, \tag{46}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{47}$$

Diese Gleichungen formulieren die beiden „Impulssätze“: die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der resultierenden

Kraft; die zeitliche Änderung des Impulsmomentes ist gleich dem resultierenden Kraftmomente, bezogen auf denselben im Raume festen Momentenpunkt.

Hat man es mit einem sogenannten „Kreisel" zu tun, d. h. mit einem starren Körper, der in einem seiner Punkte festgehalten wird, so wird man diesen festen Punkt als Bezugspunkt wählen, und durch (47) die Drehbewegung um den festen Punkt darstellen.

Beziehen wir hingegen das Impulsmoment auf einen im Körper festen Punkt, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegt, so ist die zeitliche Änderung des Hebelarmes nicht gleich $\mathfrak{v}$, sondern gleich der Differenz $(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)$ der Geschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes und derjenigen des Momentenpunktes zu setzen. Aus

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0$$

aber folgt

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = -\left[\mathfrak{v}_0, \sum_1^n m\mathfrak{v}\right] + \sum_1^n \left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right],$$

und es wird nach (43), (44) die auf einen bewegten Momentenpunkt bezogene zweite Impulsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{B}] = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{48}$$

Meist führt man bei der Behandlung der freien Bewegung des starren Körpers den Schwerpunkt als Momentenpunkt ein. Ist M die gesamte Masse des Körpers, so ist der Impuls $\mathfrak{B} = M \cdot \mathfrak{v}_0$, er weist parallel der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Alsdann fällt das Zusatzglied in (48) fort, und es lauten die Bewegungsgleichungen

$$M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \sum_1^n \mathfrak{K}, \tag{49}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{50}$$

Die erste Gleichung spricht den Schwerpunktsatz aus: Der Schwerpunkt bewegt sich wie ein materieller Punkt von der Masse M, an dem die Resultierende der äußeren Kräfte angreift. Die zweite Gleichung ist formal mit (47) identisch; sie führt mithin die Bestimmung der Bewegung um den Schwerpunkt auf das Problem der Rotation des in einem seiner Punkte festgehaltenen starren Körpers, des sogenannten Kreisels, zurück.

§ 13. Rotierendes Bezugssystem.

Wie es soeben zweckmäßig war, einen Bezugspunkt zu wählen, der die Bewegung des Körpers mitmacht, so empfiehlt es sich auch zuweilen, die zeitliche Zunahme eines Vektors $\mathfrak{A}$, den wir uns im Koordinatenanfang aufgetragen denken, nicht von einem im Raume festen, sondern von einem mit dem Körper rotierenden Bezugssysteme aus zu beurteilen; so nehmen wir z. B. an der Oberfläche der rotierenden Erde nicht die wirkliche Bewegung, sondern die Relativbewegung der Massen gegen die Erde wahr, wir beurteilen also die Bewegung der Körper von einem rotierenden Bezugssysteme aus. Wir fragen allgemein nach der zeitlichen Zunahme von $\mathfrak{A}$, beurteilt von einem Bezugssysteme aus, das mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um den Koordinatenanfangspunkt rotiert; wir wollen sie $\frac{d'\mathfrak{A}}{dt}$ schreiben.

Der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ gegen das ursprüngliche im Raume feste Bezugssystem. Die Punkte des starren Körpers und des mit ihm starr verbundenen Systemes bewegen sich nach (35) mit Geschwindigkeiten, die durch das Vektorprodukt $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ angegeben werden, wenn $\mathfrak{r}$ den vom festen Anfangspunkte aus konstruierten Radiusvektor anzeigt. Betrachten wir jetzt die Bewegung, die der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ in dem rotierenden Systeme beschreibt; im Raume bewegt er sich mit der Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$, der Punkt des rotierenden Systemes, in den er gerade fällt, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $[\mathfrak{u}\mathfrak{A}]$ im

Raume. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Endpunkt von $\mathfrak{A}$ in dem rotierenden Systeme fortwandert, ist offenbar die Relativgeschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - [\mathfrak{u}\mathfrak{A}].$$

Wir erhalten demnach als die vom rotierenden Systeme aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$

$$\frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{A}\mathfrak{u}]. \tag{51}$$

Wir sind jetzt imstande, die Bewegungsgleichungen des freien starren Körpers auf ein im Körper festes Bezugssystem umzurechnen. Lassen wir zunächst die Lage des Bezugspunktes im Körper beliebig, so folgt aus (46) und (48)

$$\frac{d'\mathfrak{B}}{dt} + [\mathfrak{u}\mathfrak{B}] = \sum_1^n \mathfrak{K}, \tag{52}$$

$$\frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{u}\mathfrak{U}] + [\mathfrak{v}_0\mathfrak{B}] = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}]. \tag{53}$$

Legt man insbesondere, im Falle des freien starren Körpers, den Momentenpunkt in den Schwerpunkt, oder, im Falle des Kreisels, in den festgehaltenen Punkt, so wird die Rotationsbewegung bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{d'\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{u}\mathfrak{U}] = \sum_1^n [\mathfrak{r}\mathfrak{K}], \tag{54}$$

die man direkter aus (47) oder (50), in Verbindung mit (51) erhalten hätte.

Es mögen die Gleichungen (52, 53) in den allgemeinen Ausdruck (39) für die Arbeit der äußeren Kräfte eingesetzt werden.

Die hier auftretende Summe

$$\mathfrak{v}_0[\mathfrak{u}\mathfrak{B}] + \mathfrak{u}[\mathfrak{v}_0\mathfrak{B}]$$

verschwindet nach den Rechnungsregeln (25, 30), ebenso das Glied $\mathfrak{u}[\mathfrak{u}\mathfrak{U}]$, weil das Vektorprodukt $[\mathfrak{u}\mathfrak{U}]$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ ist.

Es wird daher

$$\frac{dA}{dt} = \mathfrak{v}_0 \frac{d'\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{u}\frac{d'\mathfrak{U}}{dt}.$$

Da nach dem Energieprinzip der Zuwachs der lebendigen Kraft der Arbeit der äußeren Kräfte gleich ist, so folgt

$$\frac{dT}{dt} = \mathfrak{v}_0 \frac{d'\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{u}\frac{d'\mathfrak{U}}{dt}. \tag{55}$$

Bei der Differentiierung von Skalaren, wie $\mathfrak{v}_0\mathfrak{B}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{U}$ nach der Zeit kommt es nicht darauf an, ob ein im Raume festes oder ein rotierendes Bezugssystem zugrunde gelegt wird. Wir erhalten daher

$$\frac{d}{dt}\{\mathfrak{v}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{u}\mathfrak{U} - T\} = \mathfrak{B}\frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt} + \mathfrak{U}\frac{d'\mathfrak{u}}{dt}, \tag{56}$$

und für den speziellen Fall der Kreiselbewegung ($\mathfrak{v}_0 = 0$)

$$\frac{d}{dt}\{\mathfrak{u}\mathfrak{U} - T\} = \mathfrak{U}\frac{d'\mathfrak{u}}{dt}. \tag{57}$$

§ 14. Trägheitsmomente. Tensortripel.

Die Form (54) des Momentensatzes führt sofort zu den Eulerschen Bewegungsgleichungen des Kreisels; da hier ein im Kreisel festes Bezugssystem $x'y'z'$ angenommen ist, so kann man den Drehimpuls $\mathfrak{U}$ ein für allemal durch die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ausdrücken; denn die Massenverteilung in bezug auf die Achsen $x'y'z'$ ist konstant.

Der Bezugspunkt bewegt sich nicht, es ist $\mathfrak{v}_0 = 0$, mithin sind nach (35) die Geschwindigkeiten der Massenpunkte gegeben durch

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{u}\mathfrak{r}].$$

Der Ausdruck (45) des Drehimpulses wird daher

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n m[\mathfrak{r}[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]],$$

er geht nach der Regel (32) über in

$$\mathfrak{U} = \sum_1^n m\{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}(\mathfrak{u}\mathfrak{r})\}.$$

Nehmen wir Komponenten nach den Achsen $x'y'z'$, so erhalten wir

$$\mathfrak{U}_{x'} = \sum_1^n m\cdot\{\mathfrak{u}_{x'}\cdot(x'^2+y'^2+z'^2) - x'(\mathfrak{u}_{x'}\cdot x' + \mathfrak{u}_{y'}\cdot y' + \mathfrak{u}_{z'}\cdot z')\}$$

und entsprechende Gleichungen, die wir schreiben können

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{x'} &= k_{11}\,\mathfrak{u}_{x'} + k_{12}\,\mathfrak{u}_{y'} + k_{13}\,\mathfrak{u}_{z'},\\ \mathfrak{U}_{y'} &= k_{21}\,\mathfrak{u}_{x'} + k_{22}\,\mathfrak{u}_{y'} + k_{23}\,\mathfrak{u}_{z'},\\ \mathfrak{U}_{z'} &= k_{31}\,\mathfrak{u}_{x'} + k_{32}\,\mathfrak{u}_{y'} + k_{33}\,\mathfrak{u}_{z'}.\end{aligned} \tag{58}$$

Die Koeffizienten dieser linearen Gleichungen sind die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers

$$k_{11} = \sum_1^n m(y'^2+z'^2),\quad k_{22} = \sum_1^n m(z'^2+x'^2),\quad k_{33} = \sum_1^n m(x'^2+y'^2),$$

$$k_{12} = k_{21} = -\sum_1^n mx'y',\ k_{23} = k_{32} = -\sum_1^n my'z',\ k_{31} = k_{13} = -\sum_1^n mz'x'.$$

Die Gleichungen (58) stellen, wie man sagt, die Abhängigkeit des Vektors $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{u}$ durch eine lineare Vektorfunktion dar, d. h. die Komponenten der beiden Vektoren sind durch lineare Gleichungen miteinander verknüpft. Hier haben wir es insbesondere mit homogenen linearen Gleichungen zu tun, deren Koeffizienten gewisse Symmetrieeigenschaften $k_{21} = k_{12}$ usf. besitzen. Die Gleichungen (58) stellen eine sogenannte „symmetrische“ lineare Vektorfunktion dar.

Es wird gut sein, diesen einfachsten Fall sogleich genauer zu diskutieren. Die Symmetrieeigenschaft bringt es mit sich, daß man nach Einführung des Skalars

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{2}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{U} = \frac{1}{2}k_{11}\mathfrak{u}_{x'}^2 + \frac{1}{2}k_{22}\mathfrak{u}_{y'}^2 + \frac{1}{2}k_{33}\mathfrak{u}_{z'}^2 + k_{12}\mathfrak{u}_{x'}\cdot\mathfrak{u}_{y'}\\ + k_{23}\mathfrak{u}_{y'}\mathfrak{u}_{z'} + k_{31}\mathfrak{u}_{z'}\mathfrak{u}_{x'}\end{aligned} \tag{59}$$

die Beziehung der Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{U}$ zueinander folgendermaßen ausdrücken kann

$$\mathfrak{U}_{x'} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}_{x'}},\quad \mathfrak{U}_{y'} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}_{y'}},\quad \mathfrak{U}_{z'} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{u}_{z'}}. \tag{60}$$

Die Bedeutung des Skalars L ergibt sich sofort, wenn man die aus (60) und (58) folgende Gleichung

$$\frac{dL}{dt} = \mathfrak{U}\frac{d'\mathfrak{u}}{dt}$$

mit (57) vergleicht; es wird nämlich

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{U} - T\},$$

oder, nach (59)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dL}{dt},$$

und da sowohl L wie T für $\mathfrak{u} = 0$ verschwinden, so ist

$$L = T.$$

Es ist L mit der lebendigen Kraft des rotierenden Kreisels identisch.

Wir denken uns den Kreisel um eine beliebige Achse rotierend; das Trägheitsmoment k für eine solche Achse ist definiert als Quotient aus der in Richtung der Drehachse genommenen Komponente des Drehimpulses und dem Betrage der Rotationsgeschwindigkeit

$$k = \frac{|\mathfrak{U}|\cdot\cos(\mathfrak{U}\mathfrak{u})}{|\mathfrak{u}|} = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{U}}{\mathfrak{u}^2} = \frac{2L}{\mathfrak{u}^2}.$$

Es drückt sich durch die sechs Koeffizienten $k_{11}\ldots k_{33}$ und die Richtungskosinusse $\alpha\beta\gamma$ des Vektors $\mathfrak{u}$ gegen die Achsen der $x'y'z'$ folgendermaßen aus

$$(61)\quad k = k_{11}\alpha^2 + k_{22}\beta^2 + k_{33}\gamma^2 + 2k_{12}\alpha\beta + 2k_{23}\beta\gamma + 2k_{31}\gamma\alpha.$$

Man stellt die Gesamtheit der Trägheitsmomente für die verschiedenen Achsen bekanntlich geometrisch dar, indem man das Trägheitsellipsoid

$$1 = k_{11}x'^2 + k_{22}y'^2 + k_{33}z'^2 + 2k_{12}x'y' + 2k_{23}y'z' + 2k_{31}z'x'$$

konstruiert; es gilt dann $kr'^2 = 1$, d. h. das reziproke Quadrat der Radienvektoren des Ellipsoides gibt das Trägheitsmoment für die betreffende Achse an.

Führt man die Hauptachsen des Trägheitsellipsoides als Koordinatenachsen $\xi\eta\zeta$ ein und schreibt die Hauptträgheitsmomente $k_1 k_2 k_3$, so erhält man

$$\mathfrak{U}_\xi = k_1 \mathfrak{u}_\xi, \quad \mathfrak{U}_\eta = k_2 \mathfrak{u}_\eta, \quad \mathfrak{U}_\zeta = k_3 \mathfrak{u}_\zeta.$$

Die Form (54) der Momentengleichung führt dann sofort zu den Eulerschen Gleichungen

$$(62) \qquad \begin{aligned} k_1 \frac{d\mathfrak{u}_\xi}{dt} - (k_2 - k_3)\mathfrak{u}_\eta \mathfrak{u}_\zeta &= \sum_1^n (\eta \mathfrak{K}_\zeta - \xi \mathfrak{K}_\eta), \\ k_2 \frac{d\mathfrak{u}_\eta}{dt} - (k_3 - k_1)\mathfrak{u}_\zeta \mathfrak{u}_\xi &= \sum_1^n (\xi \mathfrak{K}_\xi - \xi \mathfrak{K}_\zeta), \\ k_3 \frac{d\mathfrak{u}_\zeta}{dt} - (k_1 - k_2)\mathfrak{u}_\xi \mathfrak{u}_\eta &= \sum_1^n (\xi \mathfrak{K}_\eta - \eta \mathfrak{K}_\xi). \end{aligned}$$

In dem Systeme der Trägheits- und Deviationsmomente $k_{11} \ldots k_{31}$ des Kreisels tritt uns eine neue Klasse physikalischer Größen gegenüber, die sowohl von den Vektoren, als auch von den Skalaren verschieden ist; dasselbe ist durch sechs Bestimmungsstücke festgelegt, sei es, daß wir als solche jene sechs Größen oder die drei Hauptträgheitsmomente k_1, k_2, k_3 und drei die Lage der Hauptachsen bestimmende Angaben wählen.

Zustandsgrößen dieser Art sind in der theoretischen Physik nicht selten, insbesondere in der Elastizitätstheorie werden sie von Wichtigkeit. Der Spannungszustand eines homogen deformierten Körpers wird durch ein System von sechs Größen von diesem Charakter bestimmt; er ist immer aufzufassen als Zusammensetzung dreier Druck- oder Zugspannungen nach drei aufeinander senkrechten Richtungen. Daher rührt die Bezeichnung der in Rede stehenden Klasse physikalischer Größen als „Tensortripel", der auf ein bestimmtes Achsensystem bezogenen sechs Komponenten $k_{11} \ldots k_{31}$ als „Tensorkomponenten". Größen dieser Art treten, wie die obige Betrachtung lehrt, bei einer jeden symmetrischen linearen Vektorfunktion auf; sie lassen sich stets durch eine Mittelpunktfläche zweiten Grades darstellen, die allerdings im allgemeinen auch ein Hyperboloid sein kann (das stets positive Vorzeichen

der Trägheitsmomente bedingt es, daß diese stets durch Ellipsoide repräsentiert werden). Sind die drei Hauptachsen der repräsentierenden Fläche zweiten Grades einander gleich, so artet das Tensortripel in einen Skalar aus; Beispiele hierfür sind das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel um ihren Mittelpunkt, der Druck in einer reibungslosen Flüssigkeit.

Auf die allgemeine lineare Vektorfunktion, die 12 Koeffizienten besitzt, kommen wir im § 17 zurück.

§ 15. Die Gleichungen von Lagrange.

Hat man es mit einem Systeme von Massenpunkten zu tun, das gewissen, durch Gleichungen zwischen den Koordinaten der Massenpunkte auszudrückenden Einschränkungen der Bewegungsfreiheit unterworfen ist, so führt man mit Lagrange neue Parameter $p_1 p_2 \dots p_\lambda \dots p_l$ ein, welche die Lage des Systemes bestimmen; man wählt sie so, daß sie unabhängig voneinander sind; ihre Zahl (l) zeigt alsdann die Zahl der Freiheitsgrade des Systemes an. Die Lage der sämtlichen n Massenpunkte werde durch die von einem festen Punkte aus konstruierten (n) Radienvektoren $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \dots \mathfrak{r}_\nu \dots \mathfrak{r}_n$ angezeigt, die Funktionen der Parameter p_λ sind. Die Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{v}_\nu = \frac{d\mathfrak{r}_\nu}{dt}$$

sind abhängig von den p_λ und von deren Differentialquotienten nach der Zeit

$$q_\lambda = \frac{dp_\lambda}{dt},$$

die man als Geschwindigkeitskomponenten im allgemeineren Sinne bezeichnen kann. Aus diesen Festsetzungen folgt

$$\mathfrak{v}_\nu = \frac{d\mathfrak{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_1} \cdot q_1 + \dots + \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda} \cdot q_\lambda + \dots + \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_l} \cdot q_l,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_1 \partial p_\lambda} \cdot q_1 + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda^2} \cdot q_\lambda + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_l \partial p_\lambda} \cdot q_l,$$

mithin

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_\nu}{\partial p_\lambda} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right).$$

Die Bewegungsgesetze erhält man, indem man das D'Alembertsche Prinzip (§ 12), das die Dynamik auf die Statik zurückführt, mit dem statischen Prinzip der virtuellen Arbeit (§ 10) vereinigt. Dabei bezeichnet man die virtuellen Verrückungen der Massenpunkte, um sie von den bei der Bewegung wirklich stattfindenden $d\mathfrak{r}_\nu$ zu unterscheiden, mit $\delta\mathfrak{r}_\nu$. Das D'Alembertsche Prinzip verlangt: Die Summe der virtuellen Arbeiten der an den einzelnen Massenpunkten angreifenden äußeren Kräfte $\mathfrak{K}_\nu$ und der Trägheitskräfte

$$-m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt}$$

soll verschwinden für jede mit den Systembedingungen verträgliche Verrückung

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\mathfrak{K}_\nu - m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt},\ \delta\mathfrak{r}_\nu\right) = 0. \tag{63}$$

Da die Konfiguration des Systemes durch die Parameter p_λ bestimmt ist, so muß die Arbeit, welche die äußeren Kräfte bei einer virtuellen Verrückung leisten, sich in folgender Form schreiben lassen

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n}(\mathfrak{K}_\nu \delta\mathfrak{r}_\nu) = \sum_{\lambda=1}^{l} P_\lambda \cdot \delta p_\lambda.$$

Die P_λ sind dabei als Kraftkomponenten im allgemeineren Sinne zu bezeichnen.

Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte hingegen ist

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\delta p_\lambda \cdot \sum_{\nu=1}^{n}\left(-m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt},\ \frac{\partial\mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right).$$

Wir erhalten, die oben abgeleiteten Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der $\mathfrak{v}_\nu$ und $\mathfrak{r}_\nu$ beachtend

$$\begin{aligned}\left(-m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt},\ \frac{\partial\mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) &= -\frac{d}{dt}\left(m_\nu\mathfrak{v}_\nu,\ \frac{\partial\mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) + \left(m_\nu\mathfrak{v}_\nu,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right)\\ &= -\frac{d}{dt}\left(m_\nu\mathfrak{v}_\nu,\ \frac{\partial\mathfrak{v}_\nu}{\partial q_\lambda}\right) + \left(m_\nu\mathfrak{v}_\nu,\ \frac{\partial\mathfrak{v}_\nu}{\partial p_\lambda}\right).\end{aligned}$$

Daher wird

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(-m_\nu \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt}, \frac{\partial \mathfrak{r}_\nu}{\partial p_\lambda}\right) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu \mathfrak{v}_\nu^2 + \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu \mathfrak{v}_\nu^2$$

$$= -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda}.$$

Es folgt schließlich als Forderung des D'Alembertschen Prinzipes

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\delta p_\lambda\left\{P_\lambda - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda}\right\} = 0,$$

da die δp_λ voneinander unabhängig sind, so gelten l Differentialgleichungen

$$(64) \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda} + P_\lambda = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2 \ldots l.$$

Das sind die Lagrangeschen Gleichungen. Wir verstehen ihre Bedeutung am besten, wenn wir die Parameter p_λ als durch die Lage gewisser, auf vorgeschriebenen Bahnen sich bewegender Antriebspunkte bestimmt ansehen; durch die Lage und Bewegung der Antriebspunkte soll die Konfiguration und Bewegung des ganzen Systemes, mithin auch die lebendige Kraft T bestimmt sein; die q_λ sind die Geschwindigkeiten der Antriebspunkte, die P_λ die Komponenten der äußeren Kräfte in Richtung der Bahn, die entweder direkt oder durch den Mechanismus des Systemes übertragen, auf den betreffenden Antriebspunkt wirken. Diesen Kräften P_λ sollen nun, das verlangen die Lagrangeschen Gleichungen, die Trägheitskräfte das Gleichgewicht halten, welche infolge der Bewegung des Massensystemes an den Antriebspunkten angreifen, und für die soeben die Ausdrücke

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda}$$

gefunden wurden.

Wenn wir es mit einer Maschine zu tun haben, deren innere Bewegungen wir nicht kennen, und die wir nur nach gewissen von außen zu beobachtenden Erscheinungen

beurteilen, so werden wir zweckmäßig die Gleichungen von Lagrange verwenden; dieselben verlangen nur die Kenntnis der lebendigen Kraft des Systemes, in ihrer Abhängigkeit von Lage und Geschwindigkeit der Antriebspunkte; kennen wir diese Abhängigkeit, so können wir die Kräfte bestimmen, mit denen das System nach außen wirkt, auch wenn uns die Kenntnis der inneren Bewegung des Systemes fehlt.

Das ist der Standpunkt, den Maxwell schließlich den elektromagnetischen Erscheinungen gegenüber einnahm. Er suchte diese als den Gesetzen der Mechanik unterworfen zu begreifen; er sah indessen ab von den speziellen mechanischen Bildern, die ihn wohl früher geleitet hatten, und begnügte sich damit, nachzuweisen, daß die allgemeinen Eigenschaften der Massensysteme, welche die Lagrangeschen Gleichungen ausdrücken, auch den elektromagnetischen Systemen zukommen.

Zweites Kapitel.

Die Vektorfelder.

§ 16. Die hydrodynamische Abbildung.

Im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten wir den Begriff des Vektors und die Regeln der Vektoralgebra in Anlehnung an die Mechanik des materiellen Punktes. Die Geschwindigkeit eines solchen wurde durch einen einzigen Vektor dargestellt. Die allgemeinste Bewegung des starren Körpers, der doch aus einer unendlichen Zahl materieller Punkte besteht, konnten wir durch zwei Vektoren abbilden, die von einem beliebig gewählten Bezugspunkte aus zu konstruieren waren. In diesem Kapitel knüpfen wir an die Aufgabe an, den Bewegungszustand einer den Raum erfüllenden Flüssigkeit zu analysieren. Hier sind die Geschwindigkeiten verschiedener Massenteilchen im allgemeinen als voneinander unabhängig anzusehen, es ist jedem Punkte sein besonderer Geschwindigkeitsvektor zuzuordnen. Die bewegte, den Raum erfüllende Flüssigkeit repräsentiert, wie man sagt, ein Vektorfeld.

Man spricht in der mathematischen Physik von dem Felde einer Zustandsgröße, wenn man den Wert der Zustandsgröße in einem räumlichen Bereiche in seiner Abhängigkeit vom Orte betrachtet, und nimmt die Werte im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einzelner Flächen, Linien und Punkte, als stetig an. Es gibt Skalarfelder (z. B. das Temperaturfeld) und Vektorfelder (z. B. das Schwerkraftfeld).

Durch das Studium der Flüssigkeitsbewegungen ist die Theorie der Vektorfelder außerordentlich gefördert worden, insbesondere durch die grundlegenden Untersuchungen von Helmholtz über die Wirbelbewegungen. Auf ihnen fußte Maxwell, als er es unternahm, die Faradaysche Idee des Kraftfeldes mathematisch zu begründen. Maxwell waren hydrodynamische Analogien sogar mehr als rein mathematische Bilder, hydrodynamische Vorstellungen über den Feldmechanismus leiteten ihn bei der Aufstellung der Nahewirkungsgesetze des elektromagnetischen Feldes.

Wir schließen uns demnach der historischen Entwickelung an, wenn wir in diesem Kapitel die mathematische Theorie der Vektorfelder an der Hand der hydrodynamischen Abbildung entwickeln. Wir denken uns eine den Raum erfüllende Flüssigkeit; den von Punkt zu Punkt im allgemeinen stetig wechselnden Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ betrachten wir als Funktion des von dem festen Anfangspunkte aus konstruierten Radiusvektors $\mathfrak{r}$. Die Vektorfunktion $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$ gibt die Geschwindigkeit an, die an der Stelle herrscht, auf die sich $\mathfrak{r}$ bezieht. Wir stellen in dieser Weise durch die hydrodynamische Abbildung ein beliebiges Vektorfeld dar, in demselben Sinne, in dem wir im vorigen Kapitel einem beliebigen Vektor eine Verrückung zuordneten. Allerdings müssen wir dabei, um nicht auf spezielle Vektorfunktionen beschränkt zu sein, der Flüssigkeit zuweilen Eigenschaften zuschreiben, die von denen der wirklichen Flüssigkeiten einigermaßen abweichen. Das wird gestattet sein, da es sich hier nur um eine mathematische Analogie handelt.

§ 17. Die lineare Vektorfunktion.

Die einfachste Vektorfunktion erhalten wir, indem wir die Komponenten des abbildenden Vektors $\mathfrak{v}$ linearen Funktionen der Raumkoordinaten gleichsetzen

$$(65)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{v}_x &= \mathfrak{v}_{0x} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \mathfrak{v}_y &= \mathfrak{v}_{0y} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \mathfrak{v}_z &= \mathfrak{v}_{0z} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Die drei von xyz freien Glieder sind offenbar die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ des Anfangspunktes.

Wir zerlegen den Vektor $\mathfrak{v}$ in zwei Vektoren $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}''$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}''.$$

Dabei sollen die Komponenten von $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ folgendermaßen bestimmt sein

$$\mathfrak{v}_x' = \mathfrak{v}_{0x} - y \cdot \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) + z \cdot \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}),$$

$$\mathfrak{v}_y' = \mathfrak{v}_{0y} - z \cdot \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) + x \cdot \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}),$$

$$\mathfrak{v}_z' = \mathfrak{v}_{0z} - x \cdot \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) + y \cdot \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}).$$

$$\mathfrak{v}_x'' = a_{11}x + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})y + \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})z,$$

$$\mathfrak{v}_y'' = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})x + a_{22}y + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})z,$$

$$\mathfrak{v}_z'' = \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})x + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})y + a_{33} \cdot z.$$

Führen wir zur Abkürzung einen Vektor $\mathfrak{u}$ ein, mit den Komponenten

$$\mathfrak{u}_x = \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}), \quad \mathfrak{u}_y = \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}), \quad \mathfrak{u}_z = \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}),$$

so ist, in vektorieller Schreibweise, zu setzen

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}_0 - [\mathfrak{r}\mathfrak{u}] = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}].$$

Der Vektor $\mathfrak{v}'$ stellt also eine Bewegung dar, die auch ein starrer Körper ausführen könnte, d. h. bei der immer je

zwei Flüssigkeitsteilchen ihren Abstand behalten, bei der also die Form eines gegebenen Quantums der Flüssigkeit sich nicht ändert. Der Vektor $\mathfrak{v}''$ hingegen ist mit den Komponenten von $\mathfrak{r}$ durch lineare homogene Gleichungen verknüpft, die eine symmetrische lineare Vektorfunktion von der aus § 14 bekannten Art darstellen. Die sechs Koeffizienten

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}),\ \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}),\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13})$$

sind daher als Komponenten eines Tensortripels zu bezeichnen. Führen wir die Hauptachsen der durch dieses Tensortripel bestimmten Mittelpunktsfläche zweiten Grades als Koordinatenachsen $(\xi\eta\zeta)$ ein, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{v}_\xi'' = a_1\xi,\quad \mathfrak{v}_\eta'' = a_2\eta,\quad \mathfrak{v}_\zeta'' = a_3\zeta.$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung setzt sich zusammen aus drei Bewegungen parallel den Achsen der $\xi\eta\zeta$, bei denen die diesen Achsen parallelen Flüssigkeitszylinder mit den durch a_1, a_2, a_3 angezeigten Geschwindigkeiten sich verlängern oder verkürzen, je nachdem diese Koeffizienten positiv oder negativ sind. Diese Bewegung können wir als Formänderungsbewegung bezeichnen, oder als Dilatation nach drei senkrechten Richtungen, indem wir Kompression als negative Dilatation einschließen. Die allgemeinste, durch eine lineare Vektorfunktion (65) darzustellende Bewegung setzt sich nach den Regeln der Vektoraddition zusammen aus einer Parallelverschiebung der Flüssigkeit, welche den Anfangspunkt mit der ihm vorgeschriebenen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegt, einer Rotation, und einer Dilatation nach drei senkrechten Richtungen. Der Vektor $\mathfrak{u}$ der Rotationsgeschwindigkeit und das für die Formänderungsbewegung maßgebende Tensortripel sind durch die neun Koeffizienten $a_{11} \ldots a_{33}$ bestimmt.

Obwohl die Flüssigkeitsbewegung, welche durch die lineare Vektorfunktion dargestellt wird, sehr spezieller Art ist, so kann man doch die allgemeinste stetige Bewegung auf diese zurückführen, wenn man nicht die ganze Flüssigkeit, sondern

einen Teil ins Auge faßt, der nur einen kleinen Bereich erfüllt. Es mag der Bereich den Punkt O umgeben, der für den Moment als Koordinatenanfang genommen werden mag. Alsdann führt eine Mac-Laurinsche Entwickelung, die bei hinreichender Einschränkung des Bereiches mit den linearen Gliedern abzubrechen ist, zu der linearen Vektorfunktion

$$(66)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{v}_x &= \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}\cdot z, \\ \mathfrak{v}_y &= \mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\cdot z, \\ \mathfrak{v}_z &= \mathfrak{v}_{0z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}\cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\cdot z. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der xyz sind dabei die Werte der Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}$ usf. im Punkte O.

Aus den oben an die allgemeine lineare Vektorfunktion angeknüpften Betrachtungen folgt jetzt der Helmholtzsche Satz: Man kann die Flüssigkeitsbewegung eines hinreichend kleinen Bereiches immer betrachten als Superposition einer Translation, einer Rotation und einer Dilatation nach drei senkrechten Richtungen. Die Komponenten der Rotation sind

$$(67)\quad \mathfrak{u}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right),\ \mathfrak{u}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right),\ \mathfrak{u}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right),$$

während die Komponenten des für die Formänderungsbewegung maßgebenden Tensortripels gegeben werden durch

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x},\ \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y},\ \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right).$$

Die soeben vorgenommene Zerlegung ist für jeden Punkt verschieden; sie ist daher nicht geeignet, eine Übersicht über die Flüssigkeitsbewegung im ganzen zu geben. Hierfür sind andere Methoden ausgebildet worden, zu deren Darlegung wir uns jetzt wenden.

§ 18. Das wirbelfreie Feld und das Potential.

Aus einem jeden Skalarfelde können wir folgendermaßen ein Vektorfeld ableiten. Wir denken uns den Skalar φ von Punkt zu Punkt stetig veränderlich. Die Abnahme, welche er beim Fortschreiten längs des Linienelementes $d\mathfrak{s}$ erfährt, dividiert durch dessen Länge ds, mag die Komponente des Vektors $\mathfrak{v}$ in Richtung des Linienelementes ergeben. Es soll also

$$\mathfrak{v}_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

sein und speziell die Komponenten parallel den Koordinatenachsen

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Der so bestimmte Vektor $\mathfrak{v}$ zeigt die Richtung des größten Gefälles des Skalars φ an, sein Betrag den auf die Längeneinheit bezogenen Betrag des größten Gefälles

$$|\mathfrak{v}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Diesen Vektor nennen neuerdings viele Autoren den Gradienten des Skalars φ und schreiben $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Andere wiederum setzen $\mathfrak{v} = -\operatorname{grad} \varphi$, indem sie den Gradienten nach der entgegengesetzten Richtung hinweisen lassen, also nach derjenigen, in der φ am raschesten ansteigt. Wir gebrauchen in diesem Werke das Wort „Gradient", seinem Wortsinne gemäß, in der letztgenannten Bedeutung; wir wollen uns indessen nicht des Symboles „grad" für diesen Begriff bedienen, sondern einer anderen symbolischen Schreibweise, die auf Hamilton, den Erfinder des Quaternionenkalküls, zurückgeht. Greifen wir nämlich auf die im § 4 eingeführten Grundvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ zurück, so können wir schreiben

$$\mathfrak{v} = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{68}$$

Man führe nun den Hamiltonschen Operator ∇ ein

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

und rechne mit ihm nach den Regeln, die für die Multiplikation eines Vektors mit Skalaren im vorigen Kapitel angegeben wurden, indem man die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

wie Skalare behandelt; dann erhält man

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \tag{68a}$$

als symbolischen Ausdruck der Gleichung (68).

Für zwei Wege s, s', die beide von einem Punkte 1 zu einem Punkte 2 führen, ist nach der Definition des Vektors $\mathfrak{v}$

$$\int_1^2 \mathfrak{v}_s\, ds = \int_1^2 \mathfrak{v}_{s'}\, ds' = -(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Das hier auftretende Integral nennen wir kurz das Linienintegral des Vektors $\mathfrak{v}$. Es ist das über alle Elemente des Integrationsweges erstreckte Integral des inneren Produktes aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$. In dem Felde eines Gradienten hat es, wie wir sehen, den gleichen Wert für irgend zwei Wege, die zwei bestimmte Punkte des Feldes verbinden. Es verschwindet für jeden geschlossenen Weg

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s\, ds = 0. \tag{69}$$

Wir wollen die Flüssigkeitsströmung, die das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ abbildet, wirbelfrei nennen, wenn sein Linienintegral längs eines jeden geschlossenen Weges verschwindet, und auch das abgebildete Feld in diesem Falle als wirbelfreies bezeichnen. Dann können wir den Satz aussprechen: Das Feld des Gradienten eines Skalars φ ist stets ein wirbelfreies.

In einem Kraftfelde gibt das Linienintegral des Kraftvektors die Arbeit an. Die Bedingung, daß das Linienintegral längs einer jeden geschlossenen Kurve Null sein soll, besagt hier das Folgende: es ist nicht möglich, durch wiederholtes Herumführen eines materiellen Punktes längs eines geschlossenen Weges unbegrenzt Arbeit zu gewinnen. Wir zeigten, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn der Kraftvektor der Gradient eines Skalars ist. Umgekehrt gilt der Satz: Ein wirbelfreies Vektorfeld ist stets als Feld des Gradienten eines Skalars aufzufassen.

In der Tat, es ist durch

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \int_1^2 \mathfrak{v}_s\, ds$$

ein Skalar ($-\varphi$) von der verlangten Eigenschaft definiert. Die Definition ist eine eindeutige, wenn der Wert im Punkte 1 festgesetzt ist, denn das Linienintegral des wirbelfreien Vektors $\mathfrak{v}$ verschwindet für jeden geschlossenen Weg, es hat daher den gleichen Wert für alle diejenigen Wege, die von dem festen Punkte 1 zu dem beliebigen Punkte 2 führen. Der Wert φ_1 im Punkte 1 ist willkürlich. Ist das ganze unendliche Feld, nicht nur ein Teil desselben, wirbelfrei, so bestimmt man diese additive Konstante meist so, daß φ im Unendlichen verschwindet.

Ist das Feld, um das es sich handelt, ein Kraftfeld, so nennt man φ das Potential, oder besser das skalare Potential. Die Existenz eines Potentials ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß nicht aus dem Kraftfelde auf die angegebene Weise Arbeit unbegrenzt zu gewinnen ist. Das wirbelfreie Kraftfeld der Schwerkraft war es, aus dem zuerst der Begriff des Potentiales erwuchs. Auf die Hydrodynamik hat man diesen Begriff übertragen, indem man den jeder wirbelfreien Bewegung zugeordneten Skalar φ als Geschwindigkeitspotential bezeichnete.

§ 19. Die Ergiebigkeit eines Quellenfeldes und die Divergenz.

Der idealen Flüssigkeit, die unserer hydrodynamischen Abbildung zugrunde liegt, schreiben wir weiterhin die Eigenschaft der Inkompressibilität zu. Hierdurch wird eine Beschränkung der Bewegungsfreiheit der Flüssigkeit eingeführt, da in dem mit Flüssigkeit gefüllten Gebiete durch eine jede geschlossene Fläche im ganzen ebensoviel Flüssigkeit ausströmen, wie einströmen muß. Mit Hilfe einer solchen Strömung könnten wir nur ganz spezielle Vektorfelder abbilden.

Um diese Beschränkung nachträglich wieder aufzuheben, lassen wir zu, daß an gewissen Stellen des Raumes unsere ideale Flüssigkeit fortwährend neu erzeugt, an anderen solche vernichtet wird. Stellen der ersten Art wollen wir als Quellen, Stellen der zweiten Art als Senken oder auch als negative Quellen bezeichnen; wir behalten uns indessen vor, das Wort Quelle auch in dem allgemeineren Sinne zu gebrauchen, daß es die positiven und negativen Quellen umfaßt. Durch Annahme eines geeigneten Quellensystemes sind wir nun in der Lage, ein beliebiges Vektorfeld durch eine stationäre Bewegung einer inkompressibeln Flüssigkeit abzubilden.

Wir nehmen die Quellen als stetig über den Raum verteilt an. Es entsteht dann die Aufgabe, ein Maß für die Ergiebigkeit des Quellensystemes zu finden.

Wir denken uns zu diesem Zwecke im Innern der Flüssigkeit ein kleines rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen a, b, c. Den Koordinatenanfang legen wir in den Mittelpunkt des Parallelepipeds, die Koordinatenachsen xyz seinen Kanten parallel. Die Flüssigkeitsbewegung soll stetig und das Parallelepiped so klein sein, daß wir auf seinen Seitenflächen den Vektor $\mathfrak{v}$ mit Hilfe der Formeln (66) berechnen können.

Wir berechnen die Flüssigkeitsmenge, die im ganzen in der Zeiteinheit aus dem Parallelepiped herausströmt. Wir

betrachten zuerst die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen, für die

$$x = \pm \frac{a}{2}$$

ist. Durch die eine auf der Seite der positiven x liegende Fläche entströmt die Menge

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz\, \mathfrak{v}_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot z \right\}.$$

Da

$$\mathfrak{v}_{0x},\ \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x},\ \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y},\ \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}$$

hier Konstanten sind, die sich auf den Mittelpunkt des Parallelepipeds beziehen, so fallen die mit y und z behafteten Glieder heraus und wir erhalten

$$b \cdot c \left\{ \mathfrak{v}_{0x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} \right\}$$

für die Strömung durch diese Fläche, und ebenso

$$-b \cdot c \left\{ \mathfrak{v}_{0x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} \cdot \frac{a}{2} \right\}$$

für die Strömung, die durch die gegenüberliegende Seite das Parallelepiped verläßt; die Summe beider Glieder ist

$$a \cdot b \cdot c \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}.$$

Fügt man zwei entsprechende Ausdrücke hinzu, welche die Strömung durch die beiden anderen, zur y- bzw. z-Achse senkrechten Seitenpaare angeben, so erhält man für die Ergiebigkeit der im Innern des Parallelepipeds liegenden Quellen

$$a \cdot b \cdot c \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \right).$$

Dieser Ausdruck gilt mit um so größerer Annäherung, je kleiner das Parallelepiped ist, er gilt exakt im Grenzfalle eines

verschwindend kleinen Parallelepipeds, falls die der Gleichung (66) zugrunde liegende Voraussetzung einer stetigen Flüssigkeitsströmung erfüllt ist.

Die auf die Volumeinheit bezogene Ergiebigkeit der Flüssigkeitsquellen nennen wir die Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ und schreiben symbolisch

$$\text{div } \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}. \tag{70}$$

Der hydrodynamischen Bedeutung der Divergenz entsprechend, ist dieselbe als skalare Größe zu betrachten. Positive Werte dieses Skalars zeigen an, daß an dem betreffenden Punkte des Feldes Quellen, negative, daß Senken vorhanden sind. Aus jedem Vektorfelde ist durch Berechnung der Divergenz ein Skalarfeld, das Quellenfeld, abzuleiten. Die Divergenz eines Vektors ist ein eigentlicher Skalar oder ein Pseudoskalar, je nachdem der betreffende Vektor ein polarer oder ein axialer ist; denn geht man durch Umkehrung der Koordinatenachsen von dem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme über, so wechseln die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ wie polare Vektorkomponenten das Vorzeichen, die Divergenz eines polaren Vektors behält also beim Übergang zu einem Linkssysteme das Vorzeichen bei, die Divergenz eines axialen Vektors kehrt es um.

Es ist bemerkenswert, daß man die Divergenz erhält, wenn man den Hamiltonschen Operator

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

nach den Regeln der skalaren Multiplikation (§ 4) mit dem Vektor

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x\mathfrak{i} + \mathfrak{v}_y\mathfrak{j} + \mathfrak{v}_z\mathfrak{k}$$

vereinigt:

$$\nabla\mathfrak{v} = \text{div } \mathfrak{v}.$$

Maxwell nannte die mit negativem Vorzeichen genommene Divergenz die Konvergenz des betreffenden Vektors; da er

nicht die Multiplikationsregeln (19) für die Grundvektoren $ii = +1$, sondern die Regeln der Quaternionentheorie $ii = -1$ verwandte, so schrieb er

$$\nabla \mathfrak{v} = \text{conv } \mathfrak{v}.$$

In dieser Schrift wird das Symbol ∇ für den Gradienten reserviert und für die Divergenz immer das Symbol div geschrieben; es kann ein Irrtum über das Vorzeichen niemals entstehen.

Wir berechnen die gesamte Flüssigkeitsströmung durch eine geschlossene Fläche f, die einen mit Flüssigkeit erfüllten Raum v begrenzt. Infolge der Unzusammendrückbarkeit muß die Menge Flüssigkeit, welche die in einem Raume enthaltenen Quellen im ganzen in der Zeiteinheit erzeugen, durch die Oberfläche nach außen strömen. Führt man die Summation über alle die infinitesimalen Parallelepipede aus, in die man den Raum geteilt denkt, so erhält man den Überschuß der in der Zeiteinheit ausströmenden über die einströmende Flüssigkeit. Ist ν die nach außen weisende Normale der Fläche, so gibt $df \cdot \mathfrak{v}_\nu$ die durch df in der Zeiteinheit von innen nach außen strömende Flüssigkeit an, es wird daher

$$\int dv \cdot \text{div } \mathfrak{v} = \int df \cdot \mathfrak{v}_\nu. \tag{71}$$

Diese Gleichung spricht den sogenannten Gaußschen Satz aus. Mit Rücksicht auf die große Bedeutung dieses Satzes für die Elektrizitätslehre geben wir einen zweiten strengeren Beweis, der sich von Spezialisierung, die in der parallelepipedischen Einteilung des Raumes liegt, frei macht.

§ 20. Die Sätze von Gauß und Green.

Wir beweisen den Gaußschen Satz für ein begrenztes räumliches Gebiet von folgenden Eigenschaften. Jede Parallele zu einer der Koordinatenachsen soll die Oberfläche f nur zweimal schneiden. Besitzt ein Gebiet nicht diese Eigenschaft, so läßt es sich doch durch geeignet gelegte Schnittflächen stets

in eine endliche Zahl von Stücken zerlegen, denen die vorausgesetzte Eigenschaft zukommt. Ist der Gaußsche Satz für die einzelnen Raumstücke bewiesen, so folgt durch Summation seine Gültigkeit für das ganze Gebiet, da die auf die Schnittflächen bezüglichen Beiträge der Flächenintegrale sich aufheben.

Wir legen jetzt eine Gerade parallel der x-Achse. Es seien x', x'' die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche f, ferner ν', ν'' die nach außen weisenden, in diesen Schnittpunkten auf der Fläche errichteten Normalen. Die erste Normale ν' schließt einen stumpfen, die zweite ν'' einen spitzen Winkel mit der x-Achse ein. Wir legen ferner

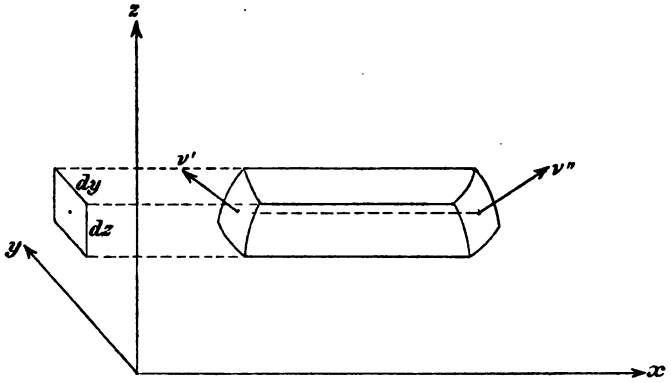


Abb. 7.

einen Balken (Abb. 7) von dem unendlich kleinen rechteckigen Querschnitt $dy\,dz$ und mit jener Geraden als Achse; derselbe mag aus der Oberfläche f die Elemente df', df'' herausschneiden; dann ist

$$-df'\cos\nu' x = +df''\cos\nu'' x = dy\,dz.$$

Wir erhalten durch Integration längs des Balkens

$$dy\,dz\int_{x'}^{x''}\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\,dx = dy\,dz\cdot\{\mathfrak{v}_x\}_{x'}^{x''} = dy\,dz(\mathfrak{v}_x'' - \mathfrak{v}_x'),$$

wo $\mathfrak{v}_x'$, $\mathfrak{v}_x''$ sich auf die durch x', x'' bestimmten Schnittpunkte beziehen. Es wird

$$dy\,dz \cdot \int_{x'}^{x''} \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} dx = df' \cdot \mathfrak{v}_x' \cos(\nu' x) + df'' \mathfrak{v}_x'' \cos(\nu'' x).$$

Indem man nun den ganzen Raum durch Ebenen parallel der (xy)- und (xz)-Ebene in derartige Balken zerlegt, teilt man gleichzeitig die Oberfläche in Elemente df, von denen jedes nur einmal vorkommt. Es ist daher

$$\int dv \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} = \int df \mathfrak{v}_x \cos \nu x.$$

Durch entsprechende Zerlegungen des Raumes in Balken, deren Längsachsen der y-Achse bzw. z-Achse parallel sind, und durch Integration der beiden anderen Glieder der Divergenz über den so zerlegten Raum erhält man entsprechende Gleichungen; die Addition der drei so gewonnenen Gleichungen ergibt den Gaußschen Satz

$$(71) \quad \int dv \operatorname{div} \mathfrak{v} = \int df \{\mathfrak{v}_x \cos \nu x + \mathfrak{v}_y \cos \nu y + \mathfrak{v}_z \cos \nu z\} = \int df \mathfrak{v}_\nu.$$

Die soeben gegebene Ableitung zeigt, daß der Gaußsche Satz nichts anderes als eine Formel der Integralrechnung ist, deren Gültigkeit nur die Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{v}$ in dem betrachteten Gebiete voraussetzt. Sie führt uns zu einer allgemeineren Fassung der Definition der Divergenz: Der Wert der Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ in einem Punkte P des Feldes wird erhalten, indem eine kleine, den Punkt P einschließende Fläche f konstruiert und die nach außen tretende Strömung $\int df \mathfrak{v}_\nu$ berechnet wird; der Grenzwert, dem der Quotient aus dieser Strömung und Volum Δv des von f begrenzten Raumes zustrebt, wenn man das Volumen mehr und mehr verkleinert, definiert den Wert der Divergenz im Punkte P.

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{\int \mathfrak{v}_\nu df}{\Delta v}.$$

Diese Definition ist insofern allgemeiner als diejenige des vorigen Paragraphen, als sie über die Form der Fläche, für welche die Strömung berechnet wird, keine einschränkende Voraussetzung macht. Der erhaltene Wert ist, wie wir erkennen, unabhängig von der Form der Fläche, insbesondere auch von dem der früheren parallelepipedischen Definition zugrunde liegenden Koordinatensystem. Damit ist erst die skalare Natur der Divergenz streng bewiesen.

Jede für die Divergenz irgendeines Vektors erhaltene Relation läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes sofort in eine Beziehung zwischen Volumintegralen und Flächenintegralen umsetzen. Es sei z. B. ein Vektor $\mathfrak{v}$ das Produkt aus einem Skalar ψ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{v} = \psi \cdot \mathfrak{A}.$$

Dann wird die Divergenz von $\mathfrak{v}$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \mathfrak{A}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \mathfrak{A}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \mathfrak{A}_z,$$

oder, da $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ nach § 18 die Komponenten von $\nabla \psi$ sind

$$\operatorname{div}(\psi \cdot \mathfrak{A}) = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \cdot \nabla \psi. \tag{72}$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes ergibt

$$\int df \psi \cdot \mathfrak{A}_\nu = \int dv \{\psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \psi\} \tag{73}$$

für jede geschlossene, den Raum v des Feldes einschließende Fläche f.

Es sei zweitens der Vektor $(-\mathfrak{v})$ in dem betrachteten Raume wirbelfrei verteilt, also, nach § 18, als Gradient eines Skalars φ aufzufassen

$$-\mathfrak{v} = +\nabla \varphi.$$

Alsdann ist die Divergenz

$$-\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{73a}$$

Die Divergenz eines Vektors erhält man, wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, mit Hilfe des Hamiltonschen

Operators, indem man diesen mit dem Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation verknüpft. Man schreibt daher

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla\nabla\varphi=\nabla^2\varphi. \tag{73b}$$

Den Operator $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ nennt man „Laplacesche Operator", mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung $\nabla^2\varphi=0$ die Laplacesche Gleichung heißt.

Die Laplacesche Gleichung sagt nichts anderes aus, als daß die wirbelfreie Strömung $\mathfrak{v}=-\nabla\varphi$ gleichzeitig quellenfrei sein soll.

Den Gaußschen Satz auf die $\nabla\varphi$ anwendend, erhält man

$$\int df\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\int dv\nabla^2\varphi. \tag{74}$$

Wir setzen endlich in Gleichung (73) $\mathfrak{A}=\nabla\varphi$ und erhalten

$$\int df\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\int dv\{\psi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi\nabla\psi)\}. \tag{75}$$

Diese Formel wird der „Greensche Satz" genannt; sie geht, wenn $\psi=1$ gesetzt wird, in (74) über.

Vertauscht man in Gleichung (75) die Skalaren φ, ψ, so erhält man

$$\int df\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=\int dv\{\varphi\nabla^2\psi+(\nabla\varphi\nabla\psi)\}.$$

Zieht man diese Gleichung von jener ab, so fällt das innere Produkt $(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)$ heraus, und man erhält die wichtige Formel

$$\int df\left\{\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right\}=\int dv\{\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi\}. \tag{76}$$

Die Gültigkeit des Gaußschen Satzes hatte die Endlichkeit und Stetigkeit des Vektors $\mathfrak{v}$, deren Divergenz einging, zur Voraussetzung. Die letzte Formel (76), die durch Integration von $\operatorname{div}\{\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi\}$ über das Raumstück v entstanden ist, setzt demgemäß die Endlichkeit und Stetigkeit der Skalaren φ, ψ und ihrer Gradienten in dem von der Fläche f begrenzten Gebiete voraus.

§ 21. Quellpunkte und Doppelquellen.

Wir haben bisher die Quellen immer stetig verteilt, den Wert der Divergenz immer endlich vorausgesetzt. In Wirklichkeit ist diese Annahme bei allen Vektorfeldern erfüllt. Immerhin gibt es Fälle, wo die Verteilung der Quellen sich einer unstetigen nähert, indem sie nahezu auf Punkte, Linien und Flächen zusammengedrängt erscheinen. Da die unstetigen Verteilungen sich mathematisch zuweilen einfacher behandeln lassen, als die stetigen, so idealisiert man wohl die Probleme, indem man mit unstetiger Verteilung rechnet. Man muß dabei allerdings, wenn man Fehlschlüsse vermeiden will, im Auge behalten, daß man mit Annahmen operiert, die der Wirklichkeit nicht genau entsprechen.

Immerhin erscheint es zweckmäßig, in diesem Paragraphen die von Quellpunkten erzeugte wirbelfreie Strömung zu behandeln. Wir gehen aus von dem Falle eines einzelnen Quellpunktes in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit. Nach der Symmetrie wird die dem Quellpunkte entströmende inkompressible Flüssigkeit sich nach allen Richtungen gleichmäßig ausbreiten. Sie wird radial abfließen, indem durch alle die konzentrischen, um den Quellpunkt als Mittelpunkt gelegten Kugelflächen die gleiche Strömung $\int df \cdot \mathfrak{v}_r$ hindurchtritt. Dieselbe gibt die Ergiebigkeit der Quelle an, wenn wir diese, wie bisher, durch das Volumen der heraustretenden Flüssigkeit messen. Es soll aber von jetzt an die Ergiebigkeit durch die Masse der idealen Flüssigkeit bestimmt und deren Dichte, über die wir noch beliebig verfügen können, gleich $\frac{1}{4\pi}$ gesetzt werden. Das geschieht, um in den Formeln die Analogie des Strömungsfeldes und des in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessenen elektrischen Kraftfeldes deutlich hervortreten zu lassen.

Die so gemessene Ergiebigkeit e der Quelle beträgt

$$e = \frac{1}{4\pi} \int df \mathfrak{v}_r = r^2 \mathfrak{v}_r;$$

umgekehrt drückt sich die radiale Geschwindigkeit durch die Ergiebigkeit folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{v}_r = \frac{e}{r^2},$$

sie nimmt ab mit dem reziproken Quadrate der Entfernung vom Quellpunkte und wird unendlich, wenn man in den Quellpunkt hineingeht.

Die wirbelfreie Natur der Strömung bringt es mit sich, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ sich als negativer Gradient eines Potentiales darstellt

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \frac{e}{r}. \tag{77}$$

Im Ausdruck des Potentiales φ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird, wie man sieht, der Faktor 4π durch die über die Dichte getroffene Festsetzung beseitigt; er kommt aber an einer anderen Stelle wieder herein, nämlich in die Beziehung, welche die Ergiebigkeit e mit der über eine den Quellpunkt einschließende Fläche integrierten Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ verknüpft:

$$\int \mathfrak{v}_n \, df = 4\pi e. \tag{78}$$

Haben wir nun eine Reihe von n Quellpunkten, von den Ergiebigkeiten $e_1 \ldots e_n$, deren Felder sich superponieren, so kann man das resultierende Feld entweder durch geometrische Addition der Vektoren $\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_n$, oder einfacher durch algebraische Addition der skalaren Potentiale $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ bestimmen:

$$\mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{v}_i = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i}. \tag{79}$$

Konstruiert man eine geschlossene Fläche, die eine Zahl von Quellpunkten einschließt, so ist das Flüssigkeitsvolumen, welches durch die Fläche nach außen tritt, gleich 4πmal der algebraischen Summe der Ergiebigkeiten der eingeschlossenen Quellen.

Schließt die Fläche das ganze endlich ausgedehnte Quellsystem ein, so ist das Volum der herausströmenden Flüssigkeit

$$4\pi \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

Ist die Fläche eine Kugel, deren Mittelpunkt innerhalb des Quellsystems liegt, so nähert sich in dem Maße, wie der Radius R der Kugel wächst, die Strömung einer radialen; denn je größer der Kugelradius gegen den größten Abstand zweier Quellpunkte ist, um so geringer ist der Fehler, den man begeht, wenn man in (79)

$$\frac{r_i - R}{R}$$

gegen 1 vernachlässigt, d. h. alle r_i durch R ersetzt, wodurch

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{R}$$

wird. In solchen Entfernungen wirkt das Quellsystem wie ein einzelner Quellpunkt im Mittelpunkt der Kugel, dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit des Quellsystems ist. Im allgemeinen verschwindet daher das Potential im Unendlichen wie die reziproke erste Potenz, die radiale Geschwindigkeit, wie die reziproke zweite Potenz von R.

Besonderes Interesse verdienen diejenigen Quellensysteme, in denen die Summe der Ergiebigkeiten der positiven und der negativen Quellen Null ist. Hier verschwindet im Unendlichen das Potential von höherer als der ersten, die radiale Geschwindigkeit von höherer als der zweiten Ordnung; die Strömung durch eine das ganze Quellensystem einschließende Fläche ist gleich Null. Wir wollen von diesen Feldern sagen, daß sie „nicht ins Unendliche reichen“; das elektrostatische und das magnetische Feld gehört zu diesen, das Gravitationsfeld hingegen nicht.

Das einfachste Feld dieser Art ist dasjenige, welches von zwei benachbarten Quellpunkten von gleicher Ergiebigkeit, aber entgegengesetztem Vorzeichen, erzeugt wird. Wir wollen dieses Quellensystem eine „Doppelquelle“ nennen. Das Potential des zugehörigen wirbelfreien Feldes wird erhalten, indem der Grenzwert berechnet wird, dem die Differenz

$\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}$ zustrebt, wenn Quellpunkt und Senkpunkt ganz nahe aneinander rücken. Es wird für das Verständnis dieses Grenzüberganges nützlich sein, einige Begriffe zu erläutern, die bisher nicht zur Sprache kamen.

Wir haben in § 18 die Operation ∇ kennen gelernt; dieselbe gab den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs an, den der betreffende Skalar bei einer Verschiebung nach irgendeiner Richtung erfuhr. Wir haben nun im Felde eines Quellpunktes zwei Arten von Verschiebungen zu unterscheiden, solche, bei denen der betrachtete Punkt des Feldes, den wir Aufpunkt nennen wollen, verschoben, aber der Quellpunkt festgehalten wird, und solche, bei denen der Aufpunkt festgehalten und der Quellpunkt verschoben wird. Beide Verrückungen, gleichzeitig vorgenommen, ergeben für eine jede nur vom relativen Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt abhängige Größe den Zuwachs Null, wenn anders sie parallel und gleichgerichtet sind; denn der Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt ändert sich bei einer solchen gemeinsamen Verschiebung nicht. Mithin ist eine Verrückung des Quellpunktes nach irgendeiner Richtung äquivalent einer Verrückung des Aufpunktes von dem gleichen Betrage, aber nach der entgegengesetzten Richtung. Indem wir den Zuwachs bei Verschiebung des Aufpunktes und des Quellpunktes ∇_a und ∇_q schreiben, können wir das Ergebnis unserer Betrachtung, angewandt auf die Größe $\frac{1}{r}$, ausdrücken durch

$$\nabla_a \frac{1}{r} = -\nabla_q \frac{1}{r}. \tag{80}$$

Die gewöhnliche, an skalare Größen sich anlehnende Betrachtungsweise führt zu demselben Resultate, indem sie den Abstand von Quellpunkt und Aufpunkt

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

setzt, wo xyz die Koordinaten des Aufpunktes, $\xi\eta\zeta$ diejenigen des Quellpunktes sind. Es ist dann

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial \zeta},$$

woraus der obige Satz für jede ausschließlich von r abhängige Größe folgt.

Bei der Aufgabe, von der wir ausgingen, nämlich das Potential einer Doppelquelle zu berechnen, ist eine Verrückung des Quellpunktes vorzunehmen, und zwar in der Richtung vom Senkpunkte zum Quellpunkte, und um eine sehr kleine Strecke, die gleich dem Abstande l der beiden Punkte ist. Wir führen einen neuen Vektor $\mathfrak{m}$ ein, den wir „Moment der Doppelquelle“ nennen; seine Richtung soll vom Senkpunkte nach dem Quellpunkte weisen, und sein Betrag soll gleich sein der Ergiebigkeit (e) des Quellpunktes, multipliziert mit dem Abstande l vom Quellpunkt und Senkpunkt $|\mathfrak{m}| = el$. Dann erhalten wir als Potential der Doppelquelle:

$$\varphi = \left(\mathfrak{m}, \nabla_q \frac{1}{r}\right) = -\left(\mathfrak{m}, \nabla_a \frac{1}{r}\right), \tag{81}$$

oder, in skalarer Schreibweise

$$\varphi = \mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = -\left\{ \mathfrak{m}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\}. \tag{81a}$$

Die Formel (81) gilt als Näherungsformel für ein Quellpaar entgegengesetzten Vorzeichens und für Entfernungen des Aufpunktes, die groß sind gegen den Abstand von Quellpunkt und Senkpunkt. Sie gilt streng für beliebige Abstände des Aufpunktes von der Doppelquelle, wenn man l gleich Null macht; dabei muß natürlich, wenn $|\mathfrak{m}|$ endlich bleiben soll, die Ergiebigkeit e unendlich werden, in der Weise, daß das Produkt $e \cdot l$ bei dem Grenzübergang einem bestimmten endlichen Werte zustrebt. Der Punkt $r = 0$ ist natürlich bei der Doppelquelle ebenso wie bei der einfachen Quelle, aus dem Felde auszuschließen, weil die Geschwindig-

keit dort unendlich wird. Hier liegt ein Fall vor, wo die idealisierende Voraussetzung unstetiger Verteilung der Quellen, auf das Quellgebiet selbst angewandt, zum Widerspruche mit der Wirklichkeit führt.

§ 22. Berechnung des wirbelfreien Vektorfeldes aus dem Quellenfelde.

Wir kehren zur Untersuchung des wirbelfreien Vektorfeldes mit stetig über den Raum verteilten Quellen zurück. Dabei soll, ebenso wie im letzten Paragraphen, die Ergiebigkeit der Quellen nicht durch das Volumen, sondern durch die Masse der erzeugten idealen Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$ definiert sein. Man hat dann, auf die Volumeinheit berechnet, die Ergiebigkeit

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{v},$$

und da in dem wirbelfreien Felde der Vektor $\mathfrak{v}$ der Gradient eines Potentiales ist,

$$4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\operatorname{div} \nabla\varphi = -\nabla^2\varphi. \tag{82}$$

Die letzte Gleichung lehrt, aus dem Vektor $\mathfrak{v}$, bzw. aus seinem Potentiale φ, die Verteilung der Quellen zu berechnen. Es mag jetzt die umgekehrte Aufgabe vorgelegt sein: Aus dem gegebenen Quellenfelde soll das Vektorfeld berechnet werden, das im übrigen als stetig und wirbelfrei und als nicht ins Unendliche reichend vorausgesetzt wird.

Es fragt sich zunächst, ob durch diese Angaben das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist, oder ob es nicht zwei Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ gibt, die beide den Voraussetzungen Genüge leisten, ohne daß ihre Felder durchaus übereinstimmen. Um diese Frage zu entscheiden, untersuchen wir den Vektor $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$, den wir für den Moment mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen wollen. Sein Feld soll einerseits wirbelfrei, anderseits, weil ja $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ dieselben Quellen haben, quellenfrei sein. Aus der letzteren Eigenschaft folgt, daß das ganze Strömungs-

feld sich lückenlos in Röhren teilen läßt, derart, daß durch alle Querschnitte einer bestimmten Röhre die gleiche Flüssigkeitsmenge strömt, und daß die Röhren im Endlichen weder beginnen noch endigen. Ins Unendliche aber sollen sie nicht reichen, da hierher im ganzen keine Strömung ausmünden soll. Sie müssen also geschlossene Röhren sein. Wir berechnen nun die kinetische Energie, die in einer solchen, hinreichend klein gewählten Röhre enthalten ist, indem wir $\frac{\mathfrak{v}^2 \cdot dv}{8\pi}$ über die Volumelemente der Röhre integrieren. Ist s die Leitkurve der Röhre, der parallel die Strömung fließt, und q ihr Querschnitt, so ist $\mathfrak{v}^2 = \mathfrak{v}_s^2$ und $dv = q \cdot ds$, ferner $\mathfrak{v}_s \cdot q$ konstant längs der Röhre. Wir erhalten mithin für die kinetische Energie, die in der ganzen Röhre enthalten ist,

$$\frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{v}_s q \cdot \int_P^P \mathfrak{v}_s \, ds.$$

Da nun aber die Strömung als wirbelfrei vorausgesetzt war, so ist das längs der geschlossenen Leitkurve erstreckte Linienintegral von $\mathfrak{v}$ Null, mithin die in einer jeden Röhre enthaltene Energie Null, und daher schließlich die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeitsströmung Null.

Das ist aber unmöglich, sofern nicht im ganzen Felde $\mathfrak{v} = 0$, mithin $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ ist. Die beiden Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, die zunächst als verschieden betrachtet wurden, sind also in Wirklichkeit identisch, das gestellte Problem kann nicht mehrere Lösungen besitzen.

Der soeben gegebene Eindeutigkeitsbeweis ist natürlich ganz unabhängig davon, ob unserer idealen Flüssigkeit lebendige Kraft zugeschrieben wird oder nicht, er beruht nur auf dem Verschwinden des mathematischen Ausdruckes

$$T = \int dv \cdot \frac{1}{8\pi} \mathfrak{v}^2,$$

der allerdings zweckmäßig als lebendige Kraft der Strömung gedeutet wird. Das tritt vielleicht klarer hervor, wenn wir

den geführten Beweis in analytischem Gewande wiederholen. Wir setzen in der Greenschen Formel (75)

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi, \quad 4\pi\varrho = -\nabla^2\varphi = 0, \quad \varphi = \psi.$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, wenn die Fläche f in das Unendliche rückt, und es folgt

$$\int dv \cdot \mathfrak{v}^2 = 0.$$

Da $\mathfrak{v}^2$ niemals negativ werden kann, so kann das über den ganzen Raum erstreckte Integral nur verschwinden, wenn $\mathfrak{v}$ durchweg Null ist.

Die Greenschen Sätze führen uns nun weiter zur Lösung der gestellten Aufgabe; sie gestatten es, aus dem Quellenfelde ϱ zunächst das Feld des Potentiales φ zu berechnen, als dessen Gradient dann der Vektor $\mathfrak{v}$ erhalten wird. Wir legen die Formel (76) zugrunde; φ, ψ bedeuteten daselbst Skalare, die nebst ihren Gradienten im ganzen Raume endlich und stetig sein sollten. Wir verstehen unter φ das gesuchte Potential, während wir

$$\psi = \frac{1}{r}$$

setzen, wo r die Entfernung von einem beliebig gewählten Punkte P des Feldes angibt. Der Punkt P muß dann aus dem Felde ausgeschlossen werden, etwa durch eine kleine Kugelfläche f_0, damit ψ in dem ganzen Gebiete, auf das wir die Formel (76) anwenden, endlich und stetig wird.

Die Begrenzung dieses Gebietes besteht erstens aus der kleinen, um P als Mittelpunkt konstruierten Kugel f_0, zweitens aus einer unendlich entfernten Fläche f. Das über die letztere erstreckte Integral

$$\int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\nu} \right\}$$

ist Null. Denn da das zu dem Quellensysteme ϱ gehörende Feld nicht ins Unendliche reichen soll, so verschwindet φ von

höherer als der ersten, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ von höherer als der zweiten Ordnung im Unendlichen. Es soll ferner natürlich der Aufpunkt P, von dem aus die Entfernung r gerechnet wird, im Endlichen liegen, folglich $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}$ von der ersten bzw. zweiten Ordnung im Unendlichen verschwinden. Mithin verschwindet das Integral sogar von höherer als der ersten Ordnung. Es ergibt daher Gleichung (76)

$$\int df_0 \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right\} = \int dv \left\{\frac{1}{r}\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\frac{1}{r}\right\}.$$

In dem über die kleine Kugel f_0 zu erstreckenden Flächenintegral bedeutet ν diejenige Normale, die von dem betrachteten Gebiete nach außen weist, also nach dem Mittelpunkte der Kugel hin gerichtet ist. Es folgt

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu} = \frac{1}{r^2}.$$

Läßt man nun die Kugel f_0 mehr und mehr sich auf den Punkt P zusammenziehen, so verschwindet in der Grenze das Glied

$$\int df_0 \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$$

und das andere Glied wird

$$-\int\frac{df_0\cdot\varphi}{r^2} = -4\pi\varphi,$$

wo φ jetzt den Wert des Potentiales im Punkte P bezeichnet. Da ferner in dem Volumintegrale nach Gleichung (82)

$$4\pi\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{v} = -\nabla^2\varphi$$

einzuführen und

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0$$

zu setzen ist — es stellt $\frac{1}{r}$ das Potential eines in P befindlichen Quellpunktes von der Ergiebigkeit 1 dar, dessen Feld außerhalb f_0 quellenfrei ist —, so erhält man schließlich

$$\varphi = \int \frac{dv \cdot \varrho}{r} \tag{83}$$

als Wert des Potentiales in dem jetzt beliebig zu wählenden Aufpunkte P.

Vergleicht man diese Formel mit der im vorigen Paragraphen für das Potential eines Systemes von Quellpunkten abgeleiteten Formel (79), so bemerkt man, daß hier das resultierende Potential ebenso durch algebraische Summation von den einzelnen Volumelementen herrührender Beiträge entsteht, wie es dort durch Addition der Potentiale der einzelnen Quellpunkte entstand. Doch führt das jetzt für stetig verteilte Quellen erhaltene Resultat insofern weiter, als es auch auf das Innere des Quellengebietes anwendbar ist. Auch hier berechnet sich das Potential nach (83), der Vektor $\mathfrak{v}$ wird alsdann als Gradient von φ erhalten:

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi;$$

er entsteht durch geometrische Addition der von den einzelnen Volumelementen des Quellensystemes erzeugten Geschwindigkeiten.

Bisweilen gelingt es auf Grund dieses Superpositionsprinzipes, durch bloße Symmetriebetrachtungen die von einem gegebenen Quellensystem herrührende Strömung zu finden. Es mögen etwa die Quellen gleichförmig über eine Vollkugel vom Radius a verteilt sein. Nach der Symmetrie folgt, daß die Strömung überall radial verläuft. Mithin ist das Flüssigkeitsvolumen, das durch konzentrische Kugeln vom Radius R nach außen tritt,

$$4\pi \,|\, \mathfrak{v} \,|\, \cdot R^2,$$

und der Gaußsche Satz ergibt gemäß Gleichung (82) für $R \geqq a$

$$|\, \mathfrak{v} \,| = \varrho \frac{V}{R^2} = \frac{e}{R^2}. \qquad \left(V = \frac{4\pi}{3} a^3\right)$$

Die Strömung erfolgt außerhalb der mit Quellen gleichförmig erfüllten Kugel so, als ob im Mittelpunkte ein Quellpunkt sich befände, dessen Ergiebigkeit gleich der gesamten Ergiebigkeit der Kugel ist.

Durch Kugeln hingegen, welche innerhalb des Quellengebietes liegen, tritt nur dasjenige Flüssigkeitsvolumen, welches den eingeschlossenen Quellen von der Ergiebigkeit

$$\varrho \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$$

entspricht; die äußeren Kugelschichten, allein vorhanden, würden in dem inneren Hohlraum nach Symmetrie eine wirbelfreie Strömung nicht erzeugen können. Mithin ist für $R \leqq a$

$$|\mathfrak{v}| = \frac{4\pi}{3} R \cdot \varrho.$$

Das Potential φ bestimmt man nun so, daß es im Unendlichen verschwindet. Es ist für $R \geqq a$

$$\varphi = \int_R^\infty |\mathfrak{v}|\, dR = \varrho \frac{V}{R} = \frac{4\pi a^3}{3R} \cdot \varrho,$$

folglich für $R = a$

$$\varphi = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho,$$

daher für $R < a$

$$\varphi = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho + \int_{R'}^a |\mathfrak{v}|\, dR = \frac{4\pi a^2}{3} \cdot \varrho + \left\{\frac{2\pi R^2}{3}\varrho\right\}_R^a,$$

oder schließlich

(83a) $R \geqq a$ $\qquad \varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \varrho \cdot \frac{1}{R}$,

(83b) $R \leqq a$ $\qquad \varphi = \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} \cdot R^2\right) \varrho.$

Das sind die Werte des Potentiales außerhalb und innerhalb der gleichförmig mit Quellen erfüllten Vollkugel.

Es ist von Interesse, den allgemeinen Ausdruck

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{v}^2,$$

den wir oben als lebendige Kraft der Strömung deuteten, auf eine andere Form zu bringen. Das geschieht, indem wieder

in (75) $\psi = \varphi$ gesetzt und diese Gleichung auf das ganze Feld angewandt wird. Das über die unendlich entfernte Grenzfläche erstreckte Flächenintegral ist Null. Es folgt

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv(\nabla\varphi)^2 = -\frac{1}{8\pi}\int dv\,\varphi\nabla^2\varphi,$$

daher mit Rücksicht auf (82):

$$T = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\varphi. \tag{84}$$

Die lebendige Kraft der Strömung stellt sich hier dar als ein nur über das Quellengebiet zu erstreckendes Integral; diese Art der Darstellung erweckt den Anschein, als ob der Sitz der Energie ausschließlich das Gebiet der Quellen wäre, während doch in Wirklichkeit alle Volumelemente des Strömungsfeldes Energie enthalten.

§ 23. Unstetigkeitsflächen im wirbelfreien Felde. Flächendivergenz. Doppelschichten.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen fußten auf der Voraussetzung, daß die betrachtete wirbelfreie Strömung überall endlich und stetig verläuft, daß mithin weder das Potential, noch der Vektor $\mathfrak{v}$ selbst ihre Werte etwa beim Durchschreiten gewisser Flächen sprunghaft ändern. Wir wollen diese Voraussetzung jetzt fallen lassen, indem wir es als zulässig ansehen, daß sowohl φ, wie auch die Komponenten des wirbelfreien Vektors

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi$$

an gewissen Flächen Unstetigkeiten besitzen. Es wird genügen, eine einzige Unstetigkeitsfläche (f_{12}) in Betracht zu ziehen (Abb. 8), die zwei Gebiete (1, 2) des Feldes scheidet. Da zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche $\mathfrak{v}$ der Gradient von φ sein soll, so werden die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{v}$ zu jeder Seite von f_{12} sich aus der Ver-

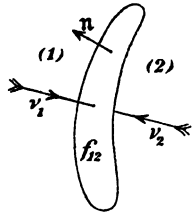


Abb. 8.

änderung des Potentiales φ beim Fortschreiten längs der Fläche berechnen, ihre Sprünge aus dem Sprunge der Potentialwerte. Es wird daher außer dem Sprunge von φ nur der Sprung der Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ unabhängig vorzuschreiben sein. Wir wollen zwei diesen Sprüngen proportionale Größen ω, τ einführen, die genauer durch folgende Gleichung definiert sind

$$4\pi\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_2} = -(\mathfrak{v}_{\nu 1} + \mathfrak{v}_{\nu 2}), \tag{85}$$

$$4\pi\tau = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{86}$$

Dabei sollen die Normalen ν_1, ν_2 so gerichtet sein, daß sie von dem betreffenden Gebiete (1) bzw. (2) aus, um dessen Feld es sich gerade handelt, nach der Fläche f_{12} hinweisen (Abb. 8). Diese Festsetzung stimmt überein mit der bei der Formulierung des Gaußschen Satzes getroffenen, daß nämlich die Normale einer das Feld begrenzenden Fläche stets nach der Fläche hin gezogen werden soll.

Man überzeugt sich leicht davon, daß durch Angabe der Verteilung von ω und τ längs der Unstetigkeitsfläche, sowie der räumlichen Verteilung des Quellenfeldes ϱ die wirbelfreie Strömung eindeutig bestimmt ist. In der Tat betrachten wir zwei wirbelfreie Felder $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$, für die sowohl die räumliche Verteilung der Quellen, wie auch die durch (85, 86) vorgeschriebenen Unstetigkeiten an der Fläche f_{12} die gleichen sind, die im übrigen endlich und stetig sind. Die Differenz $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}''$ wird dann ein wirbelfreies Feld darstellen, das überall quellenfrei, endlich und stetig ist; wir haben aber im vorigen Paragraphen gezeigt, daß ein solches Feld durchweg verschwindet; es ist daher $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}''$ gleich Null.

Um nun das Feld bei gegebenen Unstetigkeiten auf f_{12} wirklich zu berechnen, gehen wir wieder, wie im vorigen Paragraphen, von der Formel (76) aus; wir setzen dort

$$\psi = \frac{1}{r},$$

wo r die von irgendeinem Punkte P des Feldes aus gerechnete Entfernung ist. Wir legen diesen Punkt so, daß er nicht

gerade in die Unstetigkeitsfläche fällt. Wir legen wieder eine kleine Kugel um P als Mittelpunkt, um diesen Unstetigkeitspunkt von ψ aus dem Integrationsgebiete auszuschließen. Macht man diese Kugel kleiner und kleiner, so ergibt das entsprechende Flächenintegral in (76) wiederum als Grenzwert $-4\pi\varphi$, wo φ das Potential im Punkte P ist. Jetzt muß man aber auch die Unstetigkeitsfläche f_{12} aus dem Integrationsgebiete ausschließen, weil ja Endlichkeit und Stetigkeit sowohl von φ, wie von $\nabla\varphi$ in dem Gebiete v notwendig zur Gültigkeit von (76) waren.

Es mag f_{12} zunächst ein ungeschlossenes Flächenstück sein. Wir denken uns eine derselben beiderseits dicht anliegende geschlossene Fläche f, welche f_{12} von dem Integrationsgebiete ausschließt, und berechnen für f das in (76) eingehende Integral

$$\int df\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right\}.$$

Dasselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die von den beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche f_{12} herrühren; es wird daher

$$\int df\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right\}=\int df_{12}\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_2}\right)-\varphi_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}-\varphi_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_2}\right\}.$$

Wir wollen nun diejenige Normalenrichtung bevorzugen, welche von (2) nach (1) geht, und wollen sie durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ zur Darstellung bringen, den wir den einzelnen Punkten der Fläche f_{12} zuordnen (Abb. 8). Dann wird

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}=-\left(\mathfrak{n},\nabla\frac{1}{r}\right),\quad\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_2}=+\left(\mathfrak{n},\nabla\frac{1}{r}\right).$$

Dabei bezieht sich der Zuwachs $\nabla\frac{1}{r}$ nicht auf Verrückung des Aufpunktes P, sondern auf ein Fortschreiten durch die Unstetigkeitsfläche hindurch. Da diese in einem sogleich festzustellenden Sinne als System von Doppelquellen zu betrachten

ist, so schreiben wir in der Bezeichnungsweise des § 21 und mit Rücksicht auf (80)

$$-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v_1}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v_2}=\left(\mathfrak{n},\nabla_q\frac{1}{r}\right)=-\left(\mathfrak{n},\nabla_a\frac{1}{r}\right)$$

und erhalten durch Einführung der durch (85, 86) definierten Größen ω, τ:

$$\int df\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right\}=4\pi\int df_{12}\left\{\frac{\omega}{r}-\left(\tau\mathfrak{n},\nabla_a\frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Hierzu ist jetzt das von der um P konstruierten Kugel herrührende Glied $-4\pi\varphi$ hinzuzufügen und die Summe ist gleichzusetzen dem über den ganzen Raum erstreckten Volumintegral der Formel (76), für das sich, wie im vorigen Paragraphen

$$\int\frac{dv}{r}\nabla^2\varphi=-4\pi\int\frac{dv\varrho}{r}$$

ergibt. Wir erhalten daher

$$\varphi=\int\frac{dv\varrho}{r}+\int df_{12}\cdot\frac{\omega}{r}-\int df_{12}\cdot\left(\tau\mathfrak{n},\nabla_a\frac{1}{r}\right) \tag{87}$$

als Potential, dessen negativ genommener Gradient

$$\mathfrak{v}=-\nabla\varphi$$

der gesuchte Vektor ist.

Wir deuten das Resultat, indem wir die drei Glieder einzeln diskutieren. Das erste Glied entspricht gemäß (83) den stetig über den Raum verteilten Quellen von der Ergiebigkeit ϱ pro Volumeinheit. Zu diesem kommt nun das zweite Glied, das zu deuten ist als Potential des Systemes über die Fläche f_{12} verbreiteter Quellen, von der Ergiebigkeit ω pro Flächeneinheit. In der Tat erkennt man diese Bedeutung der Größe ω, wenn man das Flächenelement df_{12} in einen sehr kleinen Zylinder einschließt, dessen Grundflächen df_{12} parallel und gleich sind, während seine Höhe gegen die Abmessungen

der Grundfläche verschwindend klein ist. Durch die Grundflächen entströmt das Flüssigkeitsvolumen

$$-df_{12}(\mathfrak{v}_{\nu 1} + \mathfrak{v}_{\nu 2})$$

— es weisen die Normalenrichtungen ν_1, ν_2 der Abbildung 9 nach der Fläche f_{12} hin, daher das negative Vorzeichen. Die Menge unserer idealen Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$, die in der Zeiteinheit dem Flächenelemente df_{12} entströmt, beträgt mithin

$$-\frac{1}{4\pi}df_{12}(\mathfrak{v}_{\nu 1} + \mathfrak{v}_{\nu 2}) = \frac{1}{4\pi}df_{12}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2}\right) = \omega df_{12},$$

es ist also wirklich ω die auf die Flächeneinheit berechnete Ergiebigkeit.

Neben der Ergiebigkeit der räumlich verteilten Quellen

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{v}$$

lernen wir jetzt die Ergiebigkeit der flächenhaft verteilten Quellen

$$\omega = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{v}_{\nu 1} + \mathfrak{v}_{\nu 2})$$

kennen, als einen dem Sprunge der normalen Geschwindigkeitskomponente proportionalen Skalar. Der „Divergenz“ bei stetigen Feldern tritt bei Unstetigkeitsflächen die „Flächendivergenz“

$$-(\mathfrak{v}_{\nu 1} + \mathfrak{v}_{\nu 2})$$

an die Seite.

Es ist übrigens nicht notwendig, daß f_{12} eine ungeschlossene Fläche ist; auch für geschlossene Flächen gelten die gleichen Resultate. Man beweist das, indem man die Formel (76) auf die beiden Gebiete, in die der Raum durch die Unstetigkeitsfläche zerlegt wird, einzeln anwendet und die erhaltenen Relationen addiert. Ebenso ist das Resultat auf den Fall zu übertragen, daß nicht eine einzige, sondern mehrere Unstetigkeitsflächen das Feld durchschneiden. Auch hier läßt sich der Einfluß der Unstetigkeitsflächen stets durch Annahme flächenhaft verteilter Quellen darstellen, solange $\tau = 0$ ist, d. h. so-

lange als das Potential φ bei Durchquerung jener Flächen sich stetig verhält.

Besitzt hingegen das Potential φ selbst Unstetigkeiten, so kommt das dritte Glied in (87) für die Berechnung des Feldes in Betracht, wobei τ durch (86) gegeben wird. Die Vergleichung dieses dritten Gliedes mit dem Ausdrucke (81), der in § 21 für das Potential einer Doppelquelle erhalten war, zeigt, welche Quellenverteilung hier anzunehmen ist.

Es sind Doppelquellen von dem Momente $\tau \cdot \mathfrak{n}$ pro Flächeneinheit, die über die Unstetigkeitsfläche hin verteilt sind. Man bezeichnet ein solches Quellensystem kurz als „Doppelschicht", den Vektor $\tau \cdot \mathfrak{n}$ als „Moment der Doppelschicht". Da $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor vorstellt, so ist nach (86) der Betrag des Momentes, multipliziert mit 4π, gleich dem Sprunge, den das Potential φ beim Durchschreiten der Unstetigkeitsfläche erfährt. Da ferner $\mathfrak{n}$ die Richtung von (2) nach (1) anzeigt und τ positiv ist, wenn beim Durchschreiten in dieser Richtung φ sprungweise wächst, negativ, wenn φ sprungweise abnimmt, so ist die Richtung des Vektors $\tau \cdot \mathfrak{n}$ stets diejenige Normalenrichtung, die von niederen zu höheren Potentialwerten führt.

Denkt man sich zwei Parallelflächen zur Unstetigkeitsfläche f_{12} gelegt, die eine auf der Seite der größeren, die andere auf der Seite der kleineren Potentialwerte, und die erste mit einer einfachen Schicht von Quellen, die zweite mit einer einfachen Schicht von Senken belegt, derart, daß zwei einander gegenüberliegende Elemente der beiden Flächen im ganzen die Ergiebigkeit Null besitzen, und läßt man die beiden Flächen näher und näher aneinanderrücken, so besitzt im Grenzfalle die erzeugte wirbelfreie Strömung das Potential

$$\varphi = +\int df_{12}\left(\tau\mathfrak{n}, \nabla_2 \frac{1}{r}\right) = -\int df_{12}\left(\tau\mathfrak{n}, \nabla_a \frac{1}{r}\right).$$

Das erkennt man sofort durch Betrachtungen, die durchaus denen entsprechen, die im § 21 zum Ausdrucke (81) für das Potential einer Doppelquelle führten. Der absolute Betrag

von τ ist gleichzusetzen dem Produkte aus Abstand der beiden Schichten und der Flächendichte der Quellenschicht. Wenn man nicht zur Grenze eines verschwindenden Abstandes übergeht, sondern zwei derartige Schichten in einem kleinen, jedoch endlichen Abstande annimmt, so gilt der obige Ausdruck für das Potential angenähert in solchen Aufpunkten, deren Abstand von den Punkten der beiden Schichten groß ist gegen den Abstand der beiden Schichten; er gilt in diesem Falle auch dann noch, wenn die Verteilung auf jeder der Schichten eine nicht streng, sondern nur angenähert flächenhafte ist. Solche Verteilungen der Quellen kommen in Wirklichkeit vor. Man idealisiert sie, indem man die positiven und negativen Quellen auf zwei Flächen konzentriert denkt, die dann ihrerseits wieder ganz dicht aneinanderrücken. Der Potentialausdruck, der diesem idealisierten Quellensysteme zukommt, gilt für beliebige Entfernungen des Aufpunktes von der Doppelschicht. Man muß aber im Auge behalten, daß in unmittelbarer Nähe des Quellengebietes und innerhalb desselben die vorgenommene Idealisierung nicht der Wirklichkeit entspricht, und muß sich davor hüten, hier die erhaltene Formel anzuwenden.

Man betrachte ein Flächenelement df_{12} der Doppelschicht und ziehe von seinem Mittelpunkte aus Radienvektoren $\mathfrak{r}$ nach den Aufpunkten. Wir wollen sagen, ein Aufpunkt liege auf der positiven oder negativen Seite von df_{12}, je nachdem der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ mit der Richtung des Momentes $\tau \mathfrak{n} df_{12}$ des betreffenden Flächenelementes einen spitzen oder einen stumpfen Winkel einschließt. Nun besitzt

$$-\left(\tau\mathfrak{n}, \nabla_a \frac{1}{r}\right) = +\frac{\tau \cdot \cos(\mathfrak{r}\mathfrak{n})}{r^2}$$

im ersten Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Wert, mithin ist

$$\frac{df_{12} \cdot \tau \cdot \cos(\mathfrak{r}\mathfrak{n})}{r^2} = \pm\, d\Omega \cdot |\,\tau\,|,$$

wo $d\Omega$ den körperlichen Winkel angibt, unter dem das Flächenelement df_{12} von dem betreffenden Aufpunkte aus

erscheint, und wo das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Aufpunkt auf der positiven oder auf der negativen Seite der Doppelschicht liegt; daher wird das aus den Beiträgen der Elemente der Doppelschicht sich zusammensetzende Potential

$$\varphi = \int \pm |\tau| \, d\Omega. \tag{88}$$

Man hat demnach den Betrag des Momentes $|\tau|$ zu multiplizieren mit dem körperlichen Winkel $d\Omega$, unter dem es von dem betreffenden Aufpunkte aus gesehen wird, und über die ganze Doppelschicht zu integrieren, wobei die Beiträge derjenigen Flächenelemente positiv in Rechnung zu setzen sind, auf deren positiver Seite der Aufpunkt liegt, diejenigen negativ, auf deren negativer Seite der Aufpunkt liegt.

Im allgemeinen wird $|\tau|$ längs der Fläche variabel sein; ist es konstant, so nennt man die Doppelschicht homogen; hier wird

$$\varphi = |\tau| \cdot \int \pm d\Omega = \pm |\tau| \cdot \Omega. \tag{89}$$

Dabei gibt Ω den körperlichen Winkel an, unter dem die Fläche von einem im Aufpunkte befindlichen Beobachter gesehen wird. Das folgt ohne weiteres, wenn der Aufpunkt für alle Elemente der Schicht auf der positiven, oder für alle auf der negativen Seite liegt, und hiernach ist das Vorzeichen zu bestimmen. Ist aber die homogene Doppelschicht so beschaffen, daß der Aufpunkt für einzelne Teile der Schicht auf der positiven, für andere auf der negativen Seite sich befindet, so hat man die Potentiale dieser Flächenstücke einzeln aus ihren körperlichen Winkeln zu berechnen und die Winkel, mit dem richtigen Vorzeichen versehen, zu addieren.

Auch für eine geschlossene Doppelschicht gelten die erhaltenen Resultate. Ist die Doppelschicht homogen und weist das Moment in Richtung der äußeren Normalen, so ist außen

$$\varphi = 0;$$

denn jeder von einem äußeren Punkte aus konstruierte Elementarkegel schneidet auch der Doppelschicht eine gerade

Anzahl von Flächenelementen heraus, deren Potentiale numerisch gleich sind und abwechselnd mit positivem und negativem Vorzeichen zu nehmen sind. Innen aber ist

$$\varphi = -4\pi\tau.$$

Denn die von inneren Punkten ausgehenden Elementarkegel schneiden aus der Doppelschicht eine ungerade Anzahl von Flächenstücken heraus, von denen das erste mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, während die folgenden sich aufheben. Das einer solchen geschlossenen homogenen Doppelschicht entsprechende Feld ist außen und innen Null, dabei springt aber das Potential beim Durchschreiten der Doppelschicht um $4\pi\tau$, entsprechend der Voraussetzung, von der wir ausgingen.

Daß auch für ungeschlossene homogene Doppelschichten der Sprung des Potentiales $4\pi\tau$ ist, erkennt man, indem man sie zu einer geschlossenen ergänzt denkt; das Potential der zu diesem Zwecke hinzuzufügenden Doppelschicht ist dasselbe für zwei Punkte, die auf den beiden Seiten der ursprünglichen Doppelschicht einander gegenüberliegen, abgesehen von den dem Rande benachbarten Punkten. Der Sprung $4\pi\tau$ der geschlossenen Doppelschicht ist also gleichzeitig der Sprung der ursprünglich gegebenen ungeschlossenen, ausgenommen in unmittelbarer Nähe der Randkurve.

Auf das Potential und das Feld ungeschlossener Doppelschichten kommen wir weiter unten zurück.

§ 24. Der Wirbel oder Curl eines Vektors.

Wir nannten im § 18 ein Vektorfeld wirbelfrei, wenn für einen jeden im Felde verlaufenen geschlossenen Weg das Linienintegral

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s\, ds$$

verschwindet. Als hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ergab sich, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ als negativer Gradient

aus dem Felde eines Skalars φ abzuleiten sein mußte, d. h. daß die Komponenten sich in der Form darstellen ließen

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Das Kriterium hierfür ist das Verschwinden der drei Ausdrücke

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}$$

in allen Punkten des betreffenden Gebietes. Das Verschwinden jener drei Größen ist mithin für das wirbelfreie Feld charakteristisch.

Wir werden anderseits ein Feld als Wirbelfeld bezeichnen, wenn in dem Felde in sich zurückkehrende Bewegungen vorkommen, derart, daß das Linienintegral

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s ds$$

nicht für alle im Felde zu konstruierenden geschlossenen Linien verschwindet. Es liegt nahe, dieses Linienintegral als Maß der Wirbelstärke zugrunde zu legen; das soll in der Tat geschehen. Um aber für die Wirbelstärke an einem bestimmten Punkte des Feldes ein Maß zu erhalten, welches etwa der Divergenz des Quellenfeldes entspricht, wollen wir das Linienintegral auswerten für eine sehr kleine, den betreffenden Punkt des Feldes umschlingende Kurve.

Wir wählen den betreffenden Punkt des als stetig vorausgesetzten Feldes zum Anfangspunkte O des Koordinatensystemes und konstruieren in der (yz)-Ebene ein Rechteck von den Seitenlängen b, c, in dessen Mittelpunkt der Punkt O liegt. Wir wählen es so klein, daß wir auf seinem Umfange mit den Gleichungen (66) rechnen dürfen.

Wir durchlaufen das Rechteck in demjenigen Sinne, der sich der x-Achse unseres Rechtssystemes zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechts-

gängigen Schraube zuzuordnen ist, und berechnen das Linienintegral

$$\int \mathfrak{v}_s\, ds$$

für diesen geschlossenen Weg. Die beiden zur y-Achse parallelen Seiten liefern die Beiträge

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left\{ \mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \cdot \frac{c}{2} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \int_{+\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} dy \left\{ \mathfrak{v}_{0y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \cdot \frac{c}{2} \right\}.$$

Ihre Summe ist

$$-b \cdot c \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}.$$

Die beiden anderen zur z-Achse parallelen Seiten ergeben

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0z} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \cdot \frac{b}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} z \right\} \quad \text{bzw.} \quad \int_{+\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}} dz \left\{ \mathfrak{v}_{0z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} \cdot \frac{b}{2} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} \cdot z \right\},$$

in Summa also

$$b \cdot c \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}.$$

Der Wert des Linienintegrales wird mithin durch

$$b \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \right)$$

mit um so größerer Annäherung gegeben, je kleiner das betreffende Rechteck ist. Dividieren wir jetzt durch den Flächeninhalt $b \cdot c$ und lassen denselben kleiner und kleiner werden, so definiert der Grenzwert

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}$$

die im Punkte O herrschende „Wirbelstärke um die x-Achse“; entsprechende, durch zyklische Vertauschung der xyz abzuleitende Größen

$$\mathfrak{w}_y = \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}, \quad \mathfrak{w}_z = \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}$$

geben die im Punkte O bestehenden Wirbelstärken um die y-Achse bzw. z-Achse an.

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit denen des Vektors $\mathfrak{u}$ (Gleichung 67), den wir im § 17 bei der Helmholtzschen Zerlegung als Rotationsgeschwindigkeit eines kleinen Flüssigkeitsbereiches kennen lernten, ergibt

$$\mathfrak{w}_x = 2\mathfrak{u}_x, \quad \mathfrak{w}_y = 2\mathfrak{u}_y, \quad \mathfrak{w}_z = 2\mathfrak{u}_z. \tag{90}$$

Jene drei Wirbelstärken um die Koordinatenachsen sind daher gleich den doppelten Rotationsgeschwindigkeiten um die Koordinatenachsen. Sie sind Komponenten eines Vektors $\mathfrak{w}$, den wir kurz den „Wirbel" der Flüssigkeitsströmung nennen. Wegen der Proportionalität zum Vektor $\mathfrak{u}$ nennen manche Autoren den Vektor $\mathfrak{w}$ „Rotation des Vektors $\mathfrak{v}$" und schreiben ihn rot $\mathfrak{v}$.

Da aber der Wirbel das Doppelte der Rotationsgeschwindigkeit ist, so kann diese Schreibweise leicht zu Irrtümern Veranlassung geben. Wir ziehen es daher vor, mit Maxwell und Heaviside zu schreiben

$$\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}. \tag{91}$$

Es ist bemerkenswert, daß auch der Curl eines Vektors mit Hilfe des Hamiltonschen Operators

$$\nabla = \mathfrak{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

abzuleiten ist. Mit einem Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation verbunden, ergab dieser Operator die Divergenz (§ 19). Vereinigen wir ihn aber mit $\mathfrak{v}$ nach den Gesetzen des Vektorproduktes, so erhalten wir den Curl

$$\nabla \mathfrak{A} = \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

$$[\nabla, \mathfrak{A}] = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Diese Beziehungen sind allerdings nur formaler Art, sie führen nicht weiter in dem Verständnis der Geometrie der Vektorfelder.

Wir merken ferner die Identität an

$$\text{curl}\, \nabla \varphi = 0, \tag{91a}$$

welche die im Eingange dieses Paragraphen angeführten Gleichungen in Vektorsymbolik darstellt.

Der Wirbel ist ein axialer Vektor; das ist schon daran zu erkennen, daß wir zur Festlegung seiner Komponenten einen Umlaufssinn mit Hilfe eines Rechtssystemes festlegen mußten. Das analytische Kriterium des axialen Vektors, daß nämlich seine Komponenten bei Umkehrung der drei Achsenrichtungen die Vorzeichen behalten, ist in der Tat erfüllt; denn der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ ist polar, seine Komponenten, ebenso wie die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

wechseln bei Umkehrung der drei Achsenrichtungen das Vorzeichen. Allgemein gilt die Regel: Der Curl eines polaren Vektors ist ein axialer, der Curl eines axialen ein polarer Vektor.

§ 25. Der Satz von Stokes.

Dem Gaußschen Satze (§ 20), der zu der Divergenz in enger Beziehung steht, tritt jetzt ein Satz an die Seite, der dem Curl eines Vektors in ähnlicher Weise zugeordnet ist, und der von Stokes zuerst allgemein formuliert ist. Derselbe verknüpft das Linienintegral eines Vektors $\mathfrak{v}$, längs einer geschlossenen Kurve genommen, mit dem Flächenintegrale des Wirbels $\mathfrak{w}$, das über eine von der Kurve umrandete Fläche zu erstrecken ist.

Bei der Auswertung des Linienintegrals

$$\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{v}_s\, ds$$

muß die Kurve s in einem bestimmten Sinne durchlaufen werden. Wir betrachten nur eine beliebige, von der Kurve umrandete Fläche f, die in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb des stetigen Strömungsfeldes liegt. Der Umlaufssinn der Randkurve legt auch den Umlaufssinn fest, den wir den einzelnen Elementen df zuordnen können (Abb. 9); diese

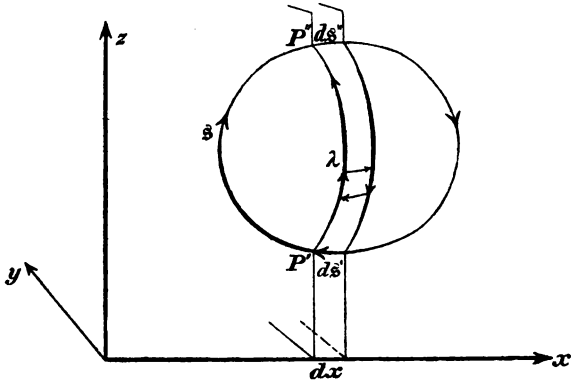


Abb. 9.

Elemente sind also Parallelogramme von der im § 6 betrachteten Art. Ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen df_x, df_y, df_z besitzen einen bestimmten Umlaufssinn, der durch ihr Vorzeichen bestimmt ist. Das Vorzeichen ist positiv, wenn der Umlaufssinn sich der x-Achse bzw. der y- oder z-Achse zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube; der entgegengesetzte Umlaufssinn hingegen findet statt, wenn das Vorzeichen negativ ist.

Wir nehmen nun an, daß die betrachtete Fläche von der Beschaffenheit ist, daß eine jede Parallelebene zu einer der drei Koordinatenebenen ihren Rand nur in zwei Punkten schneidet. Sollte das nicht der Fall sein, so läßt sich doch die Fläche durch geeignete Schnittkurven stets in eine endliche Zahl von Flächenstücken zerlegen, von denen jedes einzelne die genannte Eigenschaft hat. Die über die Randkurven der

einzelnen Stücke erstreckten Linienintegrale $\int \mathfrak{v}_s ds$ setzen sich dann zu dem über die Randkurve der ganzen Fläche erstreckten zusammen, da die Beiträge der zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufenden Randkurven der einzelnen Stücke sich herausheben.

Wir legen jetzt zwei benachbarte Parallelebenen zur (yz)-Ebene im Abstande dx; dieselben schneiden aus der Fläche f einen Streifen heraus, aus der Randkurve zwei Elemente $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$. Dem Streifen ist ein bestimmter Umlaufssinn zuzuordnen, entsprechend dem Sinne, in dem die Linienelemente $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$ zu durchlaufen sind; die Begrenzungslinie des Streifens besteht aus jenen beiden Elementen und aus den Schnittkurven jener beiden Parallelebenen zur (yz)-Ebene. Von diesen beiden Schnittkurven wollen wir diejenige, welche beim Umlauf um den Streifen auf $d\mathfrak{s}'$ folgt, und auf welche $d\mathfrak{s}''$ folgt, mit λ und Anfangs- bzw. Endpunkt von λ mit P', P'' bezeichnen. Wir teilen weiter den Streifen durch Ebenen senkrecht zur z-Achse in Elemente $d\mathfrak{f}$. Deren Projektionen auf die (zx)-Ebene sind Rechtecke, von dem durch

$$d\mathfrak{f}_y = \frac{\partial z}{\partial \lambda} \cdot d\lambda \cdot dx$$

angegebenen Flächeninhalte. Auch der Umlaufssinn dieser Rechtecke wird durch das Vorzeichen von $d\mathfrak{f}_y$ richtig angegeben, wenn dx in dem Sinne gerechnet wird, wie bei Durchlaufung des Elementes $d\mathfrak{s}''$ der Randkurve, das auf λ folgt; denn in diesem Falle folgt z. B., wenn $\frac{\partial z}{\partial \lambda} > 0$ ist, auf ein Fortschreiten in Richtung der positiven z-Achse ein Fortschreiten in Richtung der positiven oder negativen x-Achse (längs der Projektion von $d\mathfrak{s}''$), je nachdem $d\mathfrak{s}''$ einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der x-Achse einschließt; im ersteren Falle wird daher der Umlaufssinn von $d\mathfrak{f}_y$ positiver, im letzteren negativer Drehung um die y-Achse entsprechen. Mit dem Vorzeichen von $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ kehrt sich auch der Umlaufssinn von $d\mathfrak{f}_y$ um. Aus

$$dx = dx''$$

folgt

$$d\mathfrak{f}_y = \frac{\partial z}{\partial \lambda} \cdot d\lambda \cdot dx''.$$

Daher wird das über den Streifen erstreckte Integral

$$\int d\mathfrak{f}_y \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} = dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda}.$$

Teilen wir anderseits unseren Streifen durch Ebenen senkrecht zur y-Achse in Flächenelemente, deren Projektionen auf die (xy)-Ebene $d\mathfrak{f}_z$ sind, so erkennt man, daß

$$d\mathfrak{f}_z = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda \cdot dx''$$

nicht nur den Inhalt, sondern auch den Umlaufssinn dieser Flächenelemente richtig wiedergibt; ist z. B.

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} > 0, \quad dx'' > 0,$$

so folgt auf wachsendes y längs λ wachsendes x längs $d\mathfrak{s}''$, was negativer Drehung um die z-Achse entspricht. Wir erhalten daher durch Integration über den Streifen

$$\int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = -dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

Addiert man die beiden Integrale und berücksichtigt, daß x längs der Kurve λ konstant ist — dieselbe war ja durch eine zur x-Achse senkrechte Ebene aus der Fläche herausgeschnitten worden —, so folgt

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = dx'' \int_{P'}^{P''} d\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial \lambda},$$

und da ferner $dx'' = -dx'$, so ist

$$\int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = dx'' \cdot \mathfrak{v}_x'' + dx' \mathfrak{v}_x'.$$

Setzt man nun alle die Streifen, in welche die Fläche f durch Ebenen senkrecht zur x-Achse geteilt wird, zusammen, so kommt jedes Element $d\mathfrak{s}$ der Randkurve nur einmal vor. Man erhält

$$\int d\mathfrak{f}_y \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} = \int dx\, \mathfrak{v}_x.$$

In entsprechender Weise kann man die Fläche durch Ebenen senkrecht zur y-Achse oder zur z-Achse in Streifen teilen und gelangt dann durch analoge Überlegungen zu folgenden, durch zyklische Vertauschung der xyz aus der soeben bewiesenen Formel abzuleitenden Relationen

$$\int d\mathfrak{f}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \int d\mathfrak{f}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = \int dy\, \mathfrak{v}_y,$$

$$\int d\mathfrak{f}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \int d\mathfrak{f}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} = \int dz \cdot \mathfrak{v}_z.$$

Die drei Gleichungen addierend und die Größen $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ des vorigen Paragraphen einführend, erhält man

$$(92) \quad \int d\mathfrak{f}_x \mathfrak{w}_x + d\mathfrak{f}_y \mathfrak{w}_y + d\mathfrak{f}_z \mathfrak{w}_z = \int dx\, \mathfrak{v}_x + dy\, \mathfrak{v}_y + dz\, \mathfrak{v}_z.$$

Das ist die als Stokesscher Satz bezeichnete Integraltransformation, die für jedes stetige Vektorfeld gültig ist. In dem Linienintegrale steht das skalare Produkt

$$\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}_s\, ds,$$

in dem Flächenintegrale steht das skalare Produkt aus dem Flächenelemente $d\mathfrak{f}$, das mit einem Umlaufssinn versehen ist, und dem Wirbel $\mathfrak{w}$, der gleichfalls einen Umlaufssinn besitzt. Ist der Vektor $\mathfrak{v}$ polar, so sind beide Produkte Skalare im eigentlichen Sinne, der erste als Produkt zweier polarer, der zweite als Produkt zweier axialer Vektoren. Die obige Formulierung des Stokesschen Satzes ist mithin vom Koordinatensysteme unabhängig, auch dann, wenn man von einem Rechtssysteme zu einem Linkssysteme übergeht.

Beschränkt man sich indessen auf ein Rechtssystem, so entfällt die Unterscheidung polarer und axialer Vektoren; es

wird dann der Umlaufssinn des Flächenelementes durch Zuordnung einer bestimmten Normalenrichtung festgelegt, und ebenso wird dem Wirbel mit Hilfe einer Rechtsschraube ein Verrückungsvektor zugeordnet. So gelangt man zu der gewöhnlichen Fassung des Stokesschen Satzes

$$\text{(92a)} \quad \int ds \cdot \mathfrak{v}_s = \int df \{\mathfrak{w}_x \cos(\nu x) + \mathfrak{w}_y \cos(\nu y) + \mathfrak{w}_z \cos(\nu z)\}$$

bzw. zu der vektoriellen Fassung

$$\text{(92b)} \quad \int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int df \operatorname{curl}_\nu \mathfrak{v}.$$

Die Stokessche Transformation kann dazu dienen, die Definition des Curl eines Vektors allgemeiner und präziser zu formulieren, als es im vorigen Paragraphen geschah. Um die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach irgendeiner Richtung ν zu definieren, konstruiere man eine Kurve s in einer zu ν senkrechten Ebene und ordne mit Hilfe einer Rechtsschraube der Fortschreitungsrichtung ν einen Umlaufssinn längs der Kurve zu. Man berechne alsdann das Linienintegral $\int \mathfrak{v}_s\, ds$ und dividiere durch den Flächeninhalt Δf der umschlossenen Fläche. Endlich gehe man zur Grenze über, indem man die Kurve mehr und mehr auf einen Punkt P zusammenzieht. Der Grenzwert, dem der Quotient aus dem Linienintegral $\int \mathfrak{v}_s\, ds$ und dem Flächeninhalt Δf der umschlossenen Fläche bei fortgesetzter Verkleinerung des letzteren zustrebt, definiert die Komponente von curl $\mathfrak{v}$ nach der Normalenrichtung. Der Stokessche Satz ergibt

$$\text{(93)} \quad \operatorname{curl}_\nu \mathfrak{v} = \lim_{\Delta f = 0} \frac{\int \mathfrak{v}_s\, ds}{\Delta f} = \mathfrak{w}_x \cos(\nu x) + \mathfrak{w}_y \cos(\nu y) + \mathfrak{w}_z \cos(\nu z),$$

wobei

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} \text{ usw.}$$

die im vorigen Paragraphen angegebenen Werte besitzen.

Diese Definition ist allgemeiner als die im vorigen Paragraphen zugrunde gelegten, erstens weil sie nicht mit Rechtecken, sondern mit beliebig gestalteten ebenen Flächenstücken operiert, und zweitens, weil diese nicht in die Koordinatenebenen zu fallen brauchen. Läßt man sie mit diesen zusammenfallen, so erhält man als Komponenten von curl $\mathfrak{v}$ die Größen $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ des vorigen Paragraphen wieder. Läßt man die Stellung der Ebene beliebig, so besagt (93), daß die Komponente nach irgendeiner Richtung aus den Komponenten nach den Koordinatenachsen nach den für Vektorkomponenten gültigen Regeln zu berechnen ist. Dieses keineswegs selbstverständliche Verhalten wurde im vorigen Paragraphen nur aus der Proportionalität mit dem Vektor $\mathfrak{u}$, der Rotationsgeschwindigkeit, abgeleitet. Den Betrag des Vektors $\mathfrak{w}$ wollen wir weiterhin kurz die „Wirbelstärke“ nennen.

Man kann nunmehr die Stokessche Formel (92 a) anschaulich deuten, indem man die Fläche f in kleine, als eben anzusehende Elemente zerlegt und $df\mathfrak{w}_\nu$ nach der Definition (93) durch das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ längs der Randkurve ersetzt. Diejenigen Kurvenelemente, welche zwei Flächenelemente begrenzen, sind zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen; es heben sich daher die entsprechenden Linienintegrale auf, und es bleibt nur das über die Randkurve der ganzen Fläche erstreckte übrig.

Aus dem Stokesschen Satze folgt: Die Normalkomponente von curl $\mathfrak{v}$, integriert über eine geschlossene Fläche, ist Null. In der Tat, trennen wir die geschlossene Fläche durch eine Kurve s in zwei ungeschlossene Teile und legen etwa ν in Richtung der äußeren Normalen der ganzen Fläche, so ersetzt der Stokessche Satz die über die ungeschlossenen Flächen erstreckten Integrale durch zwei Linienintegrale, die längs der Randkurve in entgegengesetztem Sinne zu erstrecken sind. Es verschwindet mithin das über die geschlossene Fläche erstreckte Integral von curl, $\mathfrak{v}$; nach der Definition der Divergenz gilt daher

$$\text{(94)} \qquad \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{v} = 0,$$

eine Relation, die durch Ausrechnen sofort zu verifizieren ist. Aus ihr folgt umgekehrt mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\text{(94a)} \qquad \int df \operatorname{curl}_n \mathfrak{v} = 0$$

für eine geschlossene Fläche. Da nach (94) der Wirbel $\mathfrak{w}$ ein quellenfreier Vektor ist, so kann man ein unendliches Wirbelfeld vollständig in dünne Röhren teilen, derart, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ überall tangentiell zu der Röhrenwand weist, und daß für alle Querschnitte einer bestimmten Röhre das Produkt aus Querschnitt q und Wirbelstärke $|\mathfrak{w}|$ konstant ist. Diese Röhren werden vielfach als „Wirbelfaden", das Produkt $q \cdot |\mathfrak{w}|$ als „Moment des Wirbelfadens" bezeichnet. Die Wirbelflächen können im Innern der Flüssigkeit weder beginnen noch endigen.

Die Formel (94) legt die Frage nahe, welche Bedeutung dem Vektor $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{v}$ zukommt. Die Ausrechnung ergibt als x-Komponente

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\right) - \nabla^2 \mathfrak{v}_x = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \nabla^2 \mathfrak{v}_x.$$

Schreiben wir kurz für den Vektor, dessen Komponenten $\nabla^2\mathfrak{v}_x$, $\nabla^2\mathfrak{v}_y$, $\nabla^2\mathfrak{v}_z$ sind, $\nabla^2\mathfrak{v}$, so können wir die Gleichung für die x-Komponente und die entsprechenden für die y- und z-Komponenten zusammenfassen zu der Vektorgleichung

$$\text{(95)} \qquad \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{v} = \nabla \operatorname{div}\mathfrak{v} - \nabla^2\mathfrak{v}.$$

§ 26. Berechnung des quellenfreien Vektorfeldes aus dem Wirbelfelde.

Wir wollen in diesem Abschnitte von einem stetigen, quellenfreien Vektorfelde reden; wir stellen dasselbe gegenüber dem in § 12 behandelten wirbelfreien Felde. Dort war

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 4\pi\varrho, \quad \operatorname{curl}\mathfrak{v} = 0.$$

Hier wollen wir, um die Analogie vollständig zu machen, den Wirbel $\mathfrak{w}$ des vorigen Paragraphen gleich $4\pi\mathfrak{c}$ setzen, so daß man hat

$$\text{curl}\,\mathfrak{v} = 4\pi\mathfrak{c}, \quad \text{div}\,\mathfrak{v} = 0. \tag{96}$$

Es mag nun die Aufgabe gegeben sein, aus dem Felde des Vektors $\mathfrak{c}$, der die Wirbelverteilung bestimmt, den für die quellenfreie Strömung maßgebenden Vektor $\mathfrak{v}$ zu berechnen, dessen Feld übrigens als stetig und als nicht in das Unendliche reichend betrachtet wird; die letztere Einschränkung bringt es mit sich, daß auch das Wirbelfeld $\mathfrak{c}$ nicht in das Unendliche reicht. Es kann ein Vektorfeld nur dann als Wirbelfeld betrachtet werden, wenn durchweg $\text{div}\,\mathfrak{c} = 0$ ist; sonst wäre es nach (94) unmöglich, den Vektor $\mathfrak{v}$ der Gleichung (96) gemäß zu bestimmen. Schreibt man nun das Feld $\mathfrak{c}$ diesen Bedingungen entsprechend vor, so entsteht die Frage, ob durch (96) das Strömungsfeld $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist. Das ist es nun in der Tat. Würden etwa zwei Felder $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ den Bedingungen (96) Genüge leisten, so wäre das Feld $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ zugleich quellenfrei und wirbelfrei und nicht ins Unendliche reichend; wir zeigten aber bereits in § 22, daß ein solches Feld durchweg Null ist, also $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ nicht verschieden sein können. Wie dort das wirbelfreie Feld durch die Quellen eindeutig bestimmt war, so ist jetzt das quellenfreie Feld eindeutig durch die Wirbel bestimmt.

Die Bedingung der wirbelfreien Strömung $\text{curl}\,\mathfrak{v} = 0$ wurde erfüllt, indem $\mathfrak{v}$ als negativer Gradient eines skalaren Potentiales dargestellt wurde, das sich aus dem Quellenfelde berechnen ließ. In analoger Weise genügen wir jetzt der Bedingung der quellenfreien Strömung $\text{div}\,\mathfrak{v} = 0$, indem wir setzen

$$\mathfrak{v} = \text{curl}\,\mathfrak{A}. \tag{97}$$

Aus (94) folgt, daß die Bedingung $\text{div}\,\mathfrak{v} = 0$ dann erfüllt ist. Den neuen Hilfsvektor $\mathfrak{A}$ wollen wir das „Vektorpotential“ des quellenfreien Feldes nennen.

Das Vektorpotential kann natürlich bis zu einem gewissen Grade willkürlich bestimmt werden, ebenso wie das

skalare Potential. Im skalaren Potentiale war eine additive Konstante willkürlich, die bei Bildung des Gradienten fortfiel. Ähnlich wird zu $\mathfrak{A}$ ein wirbelfreier Vektor hinzutreten können, der bei der Berechnung des Curl herausfällt. Wir wollen diese Willkür heben, indem wir das Vektorpotential der einschränkenden Bedingung

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0 \tag{98}$$

unterwerfen. Die Beziehungen (97, 98), die $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{v}$ verknüpfen, sind durchaus identisch mit den Gleichungen (96), die $\mathfrak{v}$ aus $4\pi\mathfrak{k}$ bestimmen. Der oben gegebene Eindeutigkeitsbeweis zeigt, daß $\mathfrak{A}$, falls es im Unendlichen verschwindet, durch $\mathfrak{v}$ eindeutig bestimmt ist, ebenso wie $\mathfrak{v}$ durch $4\pi\mathfrak{k}$. Es muß daher auch $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt sein.

Um nun das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ aus dem Wirbelfelde $\mathfrak{k}$ zu berechnen, setzen wir (97) in (96) ein und erhalten

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{k}.$$

Wenden wir aber die Rechnungsregel (95) auf $\mathfrak{A}$ an und beachten, daß nach (98) $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$ ist, so folgt:

$$4\pi\mathfrak{k} = -\nabla^2\mathfrak{A}. \tag{99}$$

Diese Gleichung ist drei Gleichungen für die Komponenten,

$$4\pi\mathfrak{k}_x = -\nabla^2\mathfrak{A}_x \text{ usf.}$$

äquivalent, welche durchaus der Gleichung

$$4\pi\varrho = -\nabla^2\varphi$$

entsprechen, die das skalare Potential φ mit der Quellenverteilung ϱ des wirbelfreien Feldes verknüpft. Diese Analogie führt sofort zu den Ausdrücken für die Komponenten des Vektorpotentiales, die dem Ausdruck (83) des skalaren Potentiales entsprechen

$$\mathfrak{A}_x = \int\frac{dv}{r}\mathfrak{k}_x, \quad \mathfrak{A}_y = \int\frac{dv}{r}\mathfrak{k}_y, \quad \mathfrak{A}_z = \int\frac{dv}{r}\mathfrak{k}_z.$$

Die drei Gleichungen für die Komponenten ersetzen wir durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{A} = \int\frac{dv\cdot\mathfrak{k}}{r}. \tag{100}$$

Es steht noch der Nachweis aus, daß der so bestimmte Vektor $\mathfrak{A}$ wirklich der Bedingung (98) Genüge leistet. Um ihn zu führen, berechnen wir

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \int dv \left\{ \mathfrak{c}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{c}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{c}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} = \int dv \left(\mathfrak{c}, \nabla_a \frac{1}{r} \right).$$

Es sind natürlich die Änderungen von $\frac{1}{r}$ bei Verrückung des Aufpunktes, die bei der Berechnung des Integrales zunächst eingehen. Mit Rücksicht auf die Gleichung (80) des § 21 können wir diese durch die Veränderung bei entgegengesetzter Verrückung des Quellpunktes

$$-\nabla_q \frac{1}{r} = +\nabla_a \frac{1}{r}$$

ersetzen, oder, wie wir hier besser sagen, durch die Veränderung, die beim Fortschreiten im Wirbelfelde stattfindet. Über das Wirbelfeld soll also das Integral

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = -\int dv \left(\mathfrak{c}, \nabla_q \frac{1}{r} \right)$$

erstreckt werden.

Dieses Integral läßt sich mit Hilfe der Rechnungsregel (72) umformen; dieselbe ergibt nämlich

$$-\mathfrak{c} \cdot \nabla_q \frac{1}{r} = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right) + \frac{1}{r} \operatorname{div}\mathfrak{c};$$

da ferner $\operatorname{div}\mathfrak{c} = 0$ eine wesentliche Eigenschaft des Wirbelfeldes ist, so folgt:

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = -\int dv \operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right),$$

wo jetzt das Raumintegral der Divergenz über das Wirbelfeld mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umzuformen ist, das sich auf die Begrenzungsfläche des Wirbelfeldes bezieht.

Wir legen die Fläche f so, daß sie das ganze Wirbelsystem einschließt; dann ist auf ihr $\mathfrak{c}_\nu = 0$, und daher

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = -\int \frac{df \mathfrak{c}_\nu}{r} = 0. \tag{101}$$

Von Null verschieden würde nämlich $\mathfrak{c}_\nu$ nur dann sein können, wenn die Fläche f Wirbelfäden durchschneiden würde; alsdann würde aber f nicht das ganze Wirbelsystem einschließen; denn, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, können die Wirbelfäden im Innern der Flüssigkeitsströmung nicht endigen. Die Aussage, daß die Fläche f das Wirbelsystem einschließt, enthält mithin für ein unbegrenztes Strömungsfeld $\mathfrak{c}_\nu = 0$ als Konsequenz.

Es folgt also: Wird das Vektorpotential (100) aus dem gesamten Wirbelsystem berechnet, so verschwindet div $\mathfrak{A}$ im ganzen Felde.

Es mag die Energie der quellenfreien Strömung berechnet werden, d. h. das über den ganzen Raum erstreckte Integral (vgl. § 22)

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{v}^2.$$

Wir schicken eine allgemeine Rechnungsregel voraus, die sich auf die Divergenz des Vektorproduktes bezieht. Es ist

$$\operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x) =$$
$$- \mathfrak{B}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial z}\right) - \mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial x}\right) - \mathfrak{B}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial y}\right)$$
$$+ \mathfrak{C}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}\right) + \mathfrak{C}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{C}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right),$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C} \operatorname{curl} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{C}. \tag{102}$$

Diese, für beliebige Vektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gültige Beziehung läßt sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes sofort in eine Volum- und Flächenintegrale verknüpfende Gleichung umwandeln

$$\int df[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_\nu = \int dv\, \mathfrak{C} \operatorname{curl} \mathfrak{B} - \int dv \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{C}, \tag{102a}$$

wobei der Index ν die Komponente des Vektorproduktes in Richtung der äußeren Normalen anzeigt.

Wir erhalten jetzt

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{v} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{v} - \int df [\mathfrak{v}\mathfrak{A}]_\nu .$$

Da das Feld nicht ins Unendliche reicht, ist das Flächenintegral, genommen über eine das ganze Strömungsfeld einschließende Fläche, Null, und es folgt aus (96)

$$T = \frac{1}{2} \int dv (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{A}). \tag{103}$$

Die lebendige Kraft der Strömung drückt sich für das quellenfreie Feld durch das Integral über das halbe innere Produkt aus $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{A}$ aus, ganz ähnlich, wie für das wirbelfreie Feld sie sich ausdrückte (Gleichung 84) durch das Integral über das halbe Produkt aus ϱ und φ. Dort erschien sie als ein über das Quellengebiet, hier erscheint sie als ein über das Wirbelgebiet erstrecktes Integral.

§ 27. Unstetigkeitsflächen im quellenfreien Felde. Flächenwirbel.

Ein Feld, welches von einer Unstetigkeitsfläche durchschnitten wird, kann nur dann als quellenfrei gelten, wenn nicht nur in den stetigen Teilen des Feldes die Divergenz div $\mathfrak{v}$, sondern auch auf der Unstetigkeitsfläche f_{12} (vgl. Abb. 8) die Flächendivergenz verschwindet, d. h. wenn die Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ stetig die Fläche f_{12} durchsetzt.

Die einfachste Unstetigkeit des durchweg quellenfreien Feldes ist ein Sprung der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{v}$. Liegt ein solcher vor, so sagen wir, die Fläche sei der Sitz eines „Flächenwirbels“. Um ein exaktes Maß für diesen zu erhalten, gehen wir zu unserer Definition des Wirbels zurück, als Grenzwert des Quotienten aus Linienintegral von $\mathfrak{v}$ und

Flächeninhalt der umschlungenen Fläche. Freilich müssen wir hier, wo es sich um flächenhaft verteilte Wirbel handelt, das Maß der Wirbelstärke nicht durch den Quotienten aus einem Linienintegral und einer Fläche, sondern aus einem Linienintegral und einer Länge nehmen, ähnlich wie die Divergenz als Ergiebigkeit pro Volumeinheit, die Flächendivergenz hingegen als Ergiebigkeit pro Flächeneinheit definiert war. Wir lassen nun die (xy)-Ebene mit der Tangentialebene in dem betreffenden Punkte der Fläche zusammenfallen, die z-Achse mit derjenigen Normalenrichtung, die von (2) nach (1) weist, und die im § 23 durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bestimmt war.

Wir konstruieren ferner ein kleines Rechteck in der (yz)-Ebene, das von der Unstetigkeitsfläche halbiert wird, und umlaufen es, indem wir zunächst auf der Seite (2) parallel der y-Achse, dann von (2) nach (1) parallel der z-Achse, sodann auf der Seite (1) parallel der negativen y-Achse und von (1) nach (2) parallel der negativen z-Achse gehen. Läßt man die Länge der zur y-Achse parallelen Seiten Δy konstant, verkleinert aber die beiden anderen mehr und mehr, so wird der Wert des längs des beschriebenen Weges erstreckten Linienintegrales

$$\int \mathfrak{v}_s \, ds$$

gleich

$$(\mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}) \Delta y.$$

Dividiert man durch Δy und geht zur Grenze über, so erhält man die x-Komponente des Flächenwirbels

$$\mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}.$$

In entsprechender Weise folgt die y-Komponente

$$\mathfrak{v}_{x1} - \mathfrak{v}_{x2}.$$

Setzen wir den resultierenden Flächenwirbel gleich $4\pi\mathfrak{g}$, so hat man die Vektorgleichung

$$4\pi\mathfrak{g} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2]. \tag{104}$$

Man kann den soeben angedeuteten Grenzübergang derart modifizieren, daß man das Wirbelfeld zuerst zwischen zwei

zu f_{12} parallele Flächen einschließt und dann durch Annäherung dieser beiden Flächen an f_{12} zum Grenzfalle des Flächenwirbels übergeht. Dabei entwickelt sich aus dem räumlich verteilten Wirbel, in dem die Geschwindigkeitskomponenten noch endliche Differentialquotienten besitzen, die Unstetigkeitsfläche, längs deren die Flüssigkeitsschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Es liegt nahe, in diesem Falle, nach Analogie der Gleichung (100), das Vektorpotential des Flächenwirbels folgendermaßen zu bestimmen

$$\mathfrak{A} = \int df_{12} \frac{\mathfrak{g}}{r}. \tag{105}$$

Wir wollen diese Formel noch auf einem anderen Wege begründen. Wir gehen aus von dem im § 23 gewonnenen Resultate, daß das skalare Potential eines flächenhaft verteilten Quellensystemes

$$\varphi = \int df_{12} \frac{\omega}{r}$$

ist, wenn φ selbst auf der Fläche stetig ist, die normale Ableitung aber den durch Gleichung (85) definierten Sprung

$$4\pi\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_2}$$

erfährt. Haben wir es mit einer Unstetigkeitsfläche im quellenfreien Felde zu tun, bei deren Durchquerung das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ selbst sich stetig verhält, aber die Differentialquotienten von $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ gewisse Sprünge erfahren,

$$4\pi\mathfrak{g}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial \nu_2}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial \nu_2}, \quad 4\pi\mathfrak{g}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial \nu_2},$$

so wird die Formel (105) gelten; denn zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche befriedigen das skalare Potential, wie die Komponenten des Vektorpotentiales der Unstetigkeitsfläche die Laplacesche Gleichung.

Es ist nur der Nachweis erforderlich, daß diese Größen $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$, die sich natürlich auf ein beliebiges Koordinatensystem beziehen, die Komponenten des Vektors $\mathfrak{g}$ sind, den wir in

(104) erhielten. Um ihn zu führen, spezialisieren wir das Koordinatensystem in derselben Weise wie oben, indem wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial \nu_2} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_1} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

und wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{A}$ längs der ganzen Ausdehnung der Fläche

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)_2.$$

Man erhält dann

$$4\pi \mathfrak{g}_x = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)_1,$$

$$4\pi \mathfrak{g}_y = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)_2,$$

woraus wegen $\mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ folgt

$$4\pi \mathfrak{g}_x = \mathfrak{v}_{y2} - \mathfrak{v}_{y1}, \quad 4\pi \mathfrak{g}_y = \mathfrak{v}_{x1} - \mathfrak{v}_{x2}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Resultate (104).

Das Verschwinden der dritten, zur Unstetigkeitsfläche normalen Komponente des Flächenwirbels, das aus den allgemeinen Sätzen über Wirbelfäden folgt, hängt mit dem Verschwinden von div $\mathfrak{A}$ zu beiden Seiten des Flächenwirbels zusammen.

Der Doppelschicht von Quellen entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit würde hier eine Doppelschicht von Flächenwirbeln entsprechen, dem Sprunge des skalaren Potentiales ein Sprung des Vektorpotentiales. Ein Beispiel wäre eine strömende, sehr dünne Flüssigkeitsschicht, an die beiderseits ruhende Flüssigkeit angrenzt. Beim Durchqueren der Schicht springt die Geschwindigkeit auf einen endlichen Wert und sinkt dann wieder auf Null. Dabei wäre, um einen endlichen Sprung von $\mathfrak{A}$ zu erhalten, die Geschwindigkeit in der Schicht unendlich zu machen, derart, daß beim Grenzübergang das Produkt aus Geschwindigkeit und Dicke der Schicht einem endlichen Werte zustrebt. Es ist jedoch der Grenzfall eben wegen der

erforderlichen unendlichen Geschwindigkeit nicht strenge zu realisieren, ebensowenig, wie eine Doppelschicht von Quellen, innerhalb deren die normale Komponente der Geschwindigkeit unendlich werden müßte. Beides sind mathematische Abstraktionen, die nur bei der Darstellung des Feldes in einiger Entfernung von der Schicht in Betracht kommen.

§ 28. Zerlegung eines beliebigen Vektorfeldes in ein quellenfreies und ein wirbelfreies Feld.

Es sei jetzt ein beliebiges unbegrenztes Vektorfeld $\mathfrak{v}$ gegeben, das nicht ins Unendliche reicht; dasselbe sei im allgemeinen stetig; nur beim Durchschreiten gewisser Flächen mögen die Komponenten von $\mathfrak{v}$ sich unstetig ändern. Es soll jedoch $\mathfrak{v}$ stets endlich sein, auch auf den Unstetigkeitsflächen; durch diese Festsetzung werden Doppelschichten von Quellen oder Wirbeln von der Betrachtung ausgeschlossen.

Dieses Feld läßt sich als Superposition eines wirbelfreien Feldes $\mathfrak{v}'$ und eines quellenfreien Feldes $\mathfrak{v}''$ darstellen, und zwar nur auf eine einzige Weise. Das Feld $\mathfrak{v}'$ werde so bestimmt, daß im ganzen Raume seine Divergenz und auf etwaigen Unstetigkeitsflächen f_{12} seine Flächendivergenz derjenigen des gegebenen Vektorfeldes gleich sei,

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}' = \operatorname{div}\mathfrak{v} = 4\pi\varrho, \quad -(\mathfrak{v}'_{\nu 1} + \mathfrak{v}'_{\nu 2}) = -(\mathfrak{v}_{\nu 1} + \mathfrak{v}_{\nu 2}) = 4\pi\omega.$$

Hierdurch ist das wirbelfreie Feld $\mathfrak{v}'$ eindeutig bestimmt. Es ist nach den Vorschriften der §§ 22, 23 mit Hilfe des skalaren Potentiales φ zu berechnen, das auf f_{12} stetig ist, da ja Doppelschichten ausgeschlossen sind.

$$\text{(106)} \qquad \mathfrak{v}' = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \int\frac{dv\,\varrho}{r} + \int\frac{df_{12}\omega}{r}.$$

Der Vektor $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}''$ ist jetzt quellenfrei, er ist, wie im § 26 bewiesen wurde, eindeutig durch die Wirbelverteilung bestimmt, die auf den Unstetigkeitsflächen auch als Flächen-

wirbel (§ 24) sich darstellen kann; räumliche und flächenhafte Wirbelverteilung von $\mathfrak{v}''$ ist mit derjenigen von $\mathfrak{v}$ identisch, da ja $\mathfrak{v}'$ wirbelfrei ist,

$$\operatorname{curl}\mathfrak{v}'' = \operatorname{curl}\mathfrak{v} = 4\pi\mathfrak{c}, \qquad [\mathfrak{n},\ \mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_2''] = [\mathfrak{n},\ \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2] = 4\pi\mathfrak{g}.$$

Es wird mithin

$$\mathfrak{v}'' = \operatorname{curl}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = \int\frac{dv\,\mathfrak{c}}{r} + \int\frac{df_{12}\cdot\mathfrak{g}}{r}. \tag{107}$$

Durch (106, 107) ist das Vektorfeld $\mathfrak{v}$ in seinen wirbelfreien und seinen quellenfreien Bestandteil zerlegt. Für ein unbegrenztes Feld ist diese Zerlegung nur auf eine einzige Weise möglich.

Hat man es mit einem begrenzten Vektorfelde zu tun, so ist die Zerlegung im allgemeinen auf vielerlei Weisen möglich. Denn denkt man es sich zu einem den unendlichen Raum erfüllenden Felde ergänzt, so kann man in dem hinzugefügten Felde die Verteilung der Quellen und Wirbel bis zu einem gewissen Grade willkürlich variieren, ohne das ursprüngliche Feld dadurch zu ändern. Grenzt man etwa in einem Vektorfelde einen Bereich ab, in dem weder Quellen noch Wirbel liegen, so kann man innerhalb dieses Bereiches das Feld nach Belieben entweder aus einem Vektorpotential oder aus einem skalaren Potential ableiten; die erstere Darstellung würde der Annahme von Wirbeln außerhalb des Bereiches, die zweite der Annahme von Quellen entsprechen. Ein Beispiel dieser Art werden wir im nächsten Abschnitte kennen lernen.

Wir kehren zum unbegrenzten Felde zurück und stellen die Aufgabe, die Energie dieses Feldes zu berechnen. Indem wir der idealen Flüssigkeit unserer hydrodynamischen Abbildung wiederum die Dichte $\frac{1}{4\pi}$ zuschreiben, erhalten wir für die gesamte lebendige Kraft des Strömungsfeldes

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}^2 = \frac{1}{8\pi}\int dv\{\mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{v}''^2 + 2\mathfrak{v}'\cdot\mathfrak{v}''\}.$$

Wir untersuchen zuerst das dritte Glied, das sich als ein über den ganzen Raum erstrecktes Integral aus dem wirbelfreien Vektor

$$\mathfrak{v}' = -\nabla\varphi$$

und dem quellenfreien Vektor $\mathfrak{v}''$ darstellt. Berücksichtigt man

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}'' = 0,$$

so ergibt die Formel (72)

$$\operatorname{div}\varphi\cdot\mathfrak{v}'' = \mathfrak{v}''\nabla\varphi = -\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''.$$

Bei der Berechnung des Volumintegrales

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''$$

dürfen wir nicht ohne weiteres über die Unstetigkeitsflächen hinweg integrieren, wir haben vielmehr den Raum in Raumstücke zu zerlegen, innerhalb deren das Feld stetig ist. Zu den Begrenzungsflächen gehören die Unstetigkeitsflächen f_{12}. Jedes Element derselben kommt zweimal vor als Begrenzung der beiderseits liegenden Raumstücke (Abb. 9). Daher ergibt der Gaußsche Satz

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = -\int df_{12}\{\varphi_1\cdot\mathfrak{v}_{\nu 1}'' + \varphi_2\cdot\mathfrak{v}_{\nu 2}''\} - \int df\varphi\mathfrak{v}_\nu''.$$

Das erste, über die Unstetigkeitsfläche erstreckte Integral verschwindet, denn es ist

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

da Doppelschichten ausgeschlossen waren, und

$$\mathfrak{v}_{\nu 1}'' + \mathfrak{v}_{\nu 2}'' = 0,$$

weil der Vektor $\mathfrak{v}''$ quellenfrei ist. Das zweite Integral, welches über die unendlich entfernte, das ganze Feld einschließende Fläche zu erstrecken ist, verschwindet und zwar von höherer als der ersten Ordnung, da wir stets von Feldern handeln, die nicht ins Unendliche reichen. Mithin ist

$$\int dv\,\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' = 0,$$

es gilt folgender wichtige Satz: Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null.

Nunmehr wird die lebendige Kraft der Strömung

$$(108) \qquad T = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}'^2 + \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}''^2 = T' + T''.$$

Die Energie eines Strömungsfeldes stellt sich dar als Summe der Energien des wirbelfreien und des quellenfreien Bestandteiles.

Für stetige Felder hatten wir die Berechnung der Energie durchgeführt, sowohl für wirbelfreie (Gleichung 84), wie für quellenfreie (Gleichung 103). Unter Berücksichtigung der Flächendivergenz und des Flächenwirbels gestaltet sich jetzt die Berechnung von T' bzw. T'' folgendermaßen

$$T' = \frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}'^2$$

wird mit Hilfe von (72) umgeformt

$$T' = -\frac{1}{8\pi}\int dv\,\mathfrak{v}' \cdot \nabla\varphi = \frac{1}{8\pi}\int dv\varphi \operatorname{div}\mathfrak{v}' - \frac{1}{8\pi}\int dv \operatorname{div}\varphi\mathfrak{v}'.$$

Das erste Glied ergibt

$$\frac{1}{2}\int dv\varphi\varrho,$$

das zweite wird wiederum mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt; der Beitrag der das ganze unendliche Feld einschließenden Fläche verschwindet, weil das Feld nicht ins Unendliche reicht, und es bleibt nur übrig der Beitrag der Unstetigkeitsflächen, die als Begrenzungsflächen der stetigen Teile des Feldes auftreten; dieser Beitrag ist

$$-\int \frac{df_{12}}{8\pi}\varphi(\mathfrak{v}_{\nu 1}' + \mathfrak{v}_{\nu 2}') = \frac{1}{2}\int df_{12} \cdot \varphi\varpi.$$

Es wird daher

$$T' = \frac{1}{2} \cdot \int dv \varrho \varphi + \frac{1}{2} \int df_{12} \cdot \varpi \cdot \varphi. \tag{108a}$$

In analoger Weise wird

$$T'' = \frac{1}{8\pi} \int dv \mathfrak{v}''^2 = \frac{1}{8\pi} \int dv \mathfrak{v}'' \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

mit Hilfe der Rechnungsregel (102) umgeformt in

$$T'' = \frac{1}{2} \int dv \mathfrak{A} \mathfrak{c} + \frac{1}{8\pi} \int dv \operatorname{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{v}''].$$

Das Volumintegral der Divergenz wird wieder mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Aggregat von Flächenintegralen umgewandelt, wobei die Komponente des Vektorproduktes $[\mathfrak{A} \mathfrak{v}'']$ in Richtung der Normalen der Unstetigkeitsfläche f_{12} eingeht. Es ist nun

$$[\mathfrak{A} \mathfrak{v}'']_{\nu 1} = - \mathfrak{n} [\mathfrak{A}_1 \mathfrak{v}_1''],$$

hingegen

$$[\mathfrak{A} \mathfrak{v}'']_{\nu 2} = \mathfrak{n} [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{v}_2''];$$

denn $\mathfrak{n}$ sollte ein Einheitsvektor sein, welcher die von 1 nach 2 weisende Normalenrichtung darstellt (Abb. 8). Die Rechnungsregel (31) ergibt nun

$$- \mathfrak{n} [\mathfrak{A}_1 \mathfrak{v}_1''] = \mathfrak{A}_1 [\mathfrak{n} \mathfrak{v}_1'']; \quad \mathfrak{n} [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{v}_2''] = - \mathfrak{A}_2 [\mathfrak{n} \mathfrak{v}_2''].$$

Daher wird

$$\frac{1}{8\pi} \int dv \operatorname{div} [\mathfrak{A} \mathfrak{v}''] = \frac{1}{8\pi} \int df_{12} \{ \mathfrak{A}_1 [\mathfrak{n} \mathfrak{v}_1''] - \mathfrak{A}_2 [\mathfrak{n} \mathfrak{v}_2''] \};$$

das über die Begrenzung des ganzen Feldes erstreckte Integral verschwindet nämlich auch hier, weil das Feld nicht ins Unendliche reicht. Da nun Doppelschichten von Wirbeln ausgeschlossen waren, so darf das Vektorpotential auf df_{12} keinen Sprung erfahren; es ist hier

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2,$$

mithin

$$\mathfrak{A}_1 [\mathfrak{n} \mathfrak{v}_1''] - \mathfrak{A}_2 [\mathfrak{n} \mathfrak{v}_2''] = \mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{n} (\mathfrak{v}_1'' - \mathfrak{v}_2'')] = \mathfrak{A} 4\pi \mathfrak{g}.$$

Es wird daher schließlich

$$T'' = \frac{1}{2}\int dv\, \mathfrak{r}\,\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\int df_{12}\, \mathfrak{s}\,\mathfrak{A}. \tag{108b}$$

Auch für die Berechnung der Energie des Feldes ersetzt die Flächendivergenz vollständig die räumliche Divergenz, der flächenhaft verteilte Wirbel den räumlich verteilten. Wir hätten in der Tat die Formeln (108a), (108b) erhalten, wenn wir das Feld zunächst als stetig angesehen und dann zum Grenzfall des unstetigen Feldes übergegangen wären, wobei aus der räumlich verteilten Divergenz die Flächendivergenz, aus dem räumlich verteilten Wirbel der Flächenwirbel entsteht.

§ 29. Die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht.

Wir denken uns wieder ein unbegrenztes, quellenfreies Strömungsfeld. Die Strömung soll herrühren von einem einzigen Wirbelfaden von gegebener Leitlinie; es soll also das Linienintegral $\int \mathfrak{v}_s\, ds$ verschwinden für jede geschlossene Linie, welche den Wirbelfaden nicht umschlingt; für eine geschlossene Linie hingegen, welche den Wirbelfaden einmal umkettet, ergibt der Stokessche Satz:

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s\, ds = \int df\, \mathfrak{w}_\nu, \quad \mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v}.$$

Wir können die Fläche f bei festgehaltener Randkurve s beliebig deformieren, so daß sie den Wirbelfaden in verschiedenen Querschnitten senkrecht durchschneidet. Da hierbei das Linienintegral seinen Wert nicht ändert und da das Flächenintegral gleich dem Momente des Wirbelfadens, d. h. gleich dem Produkte $q\,|\mathfrak{w}|$ aus Querschnitt und Wirbelstärke sich ergibt, so muß das Moment für alle Querschnitte des Wirbelfadens dasselbe sein. Der Wirbelfaden kann demnach nicht innerhalb der Flüssigkeit endigen; denn gesetzt dieses wäre der Fall, so

könnte man die Fläche f so ausbiegen, daß sie ganz im wirbelfreien Gebiete verläuft, daß mithin das Linienintegral $\int_P^P \mathfrak{v}_s ds$ gleich Null wird; vorhin aber war das über dieselbe Kurve erstreckte Linienintegral durch Konstruktion einer den Wirbelfaden schneidenden Fläche von Null verschieden gefunden worden. Das ist ein Widerspruch, der nur vermieden wird, indem der Wirbelfaden beiderseits ins Unendliche läuft oder eine im Endlichen verlaufende, geschlossene Leitlinie besitzt.

Wir verringern nun den Querschnitt des Wirbelfadens und vergrößern zugleich die Wirbelstärke innerhalb des Fadens derart, daß das Produkt aus beiden Größen, das Moment des Wirbelfadens, konstant bleibt. Dann reduziert sich schließlich der Wirbelfaden auf eine Wirbellinie, von dem Momente

$$\lim_{q=0} q \cdot |\mathfrak{w}| = 4\pi \cdot \lim_{q=0} q\,|\mathfrak{c}| = 4\pi\tau,$$

und es wird für jede die Wirbellinie einmal umschlingende Kurve

$$\int_P^P \mathfrak{v}_s ds = 4\pi\tau.$$

Das Vektorpotential dieser Wirbellinie wird gegeben durch den aus (100) hervorgehenden Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \tau \cdot \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{109}$$

Hierbei stellt das gerichtete Linienelement $d\mathfrak{s}$ die Richtung der Wirbelachse dar, der sich der Umlaufssinn der Flüssigkeitsbewegung zuordnet, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer rechtsgängigen Schraube. In der unmittelbaren Nähe der Wirbellinie wird die Geschwindigkeit der Strömung unendlich; in diesem Gebiete führt die Idealisierung der Aufgabe, die in dem vorgenommenen Grenzübergange liegt, zu unzulässigen Konsequenzen. In der Tat kann ein Wirbel von endlichem Momente ebensowenig

auf eine mathematische Linie zusammengedrängt werden, wie eine Quelle von endlicher Ergiebigkeit auf einen mathematischen Punkt. Wohl aber kann man einen Wirbelfaden von endlichem Querschnitt unter Umständen durch eine Wirbellinie ersetzen, nämlich dann, wenn die Abmessungen des Querschnittes klein sind sowohl gegen die Längsabmessungen des Fadens, wie gegen den Abstand des Aufpunktes von den Elementen des Fadens. Hier leistet die Wirbellinie dieselben Dienste, die für das wirbelfreie Feld der Quellpunkt oder die Doppelquelle leistete.

Wir berechnen jetzt nach den Regeln des § 26 die Geschwindigkeit der Strömung, $\mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$, wobei wir nach den Koordinaten xyz des Aufpunktes zu differentiieren haben; stellt $\mathfrak{r}$ den von $d\mathfrak{s}$ nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor vor, $\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{r}_y$, $\mathfrak{r}_z$ seine Komponenten, so wird

$$\mathfrak{v}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \tau \cdot \int \left\{ d\mathfrak{s}_z \cdot \left(\frac{-\mathfrak{r}_y}{r^3}\right) - d\mathfrak{s}_y \cdot \left(\frac{-\mathfrak{r}_z}{r^3}\right) \right\}$$

usf.

Mithin wird der Vektor $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = \tau \cdot \int \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}\, \mathfrak{r}]. \tag{110}$$

Der Geschwindigkeitsvektor in irgendeinem Punkte des Feldes stellt sich hier dar als geometrische Summe von Geschwindigkeiten

$$d\mathfrak{v} = \frac{\tau}{r^3} [d\mathfrak{s}\, \mathfrak{r}],$$

die von den einzelnen Elementen der Wirbellinie herrühren. Der Beitrag eines jeden Wirbelelementes ist proportional dem Momente $4\pi\tau$ der Wirbellinie, ferner dem reziproken Quadrate des Abstandes von Wirbelelement und Aufpunkt und dem Sinus des Winkels, den die Wirbelachse und der nach dem Aufpunkte hin gezogene Radiusvektor miteinander einschließen; die Richtung von $d\mathfrak{v}$ steht senkrecht auf der Ebene, die durch Wirbelachse und Radiusvektor gelegt ist.

Die Vektoren $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $d\mathfrak{v}$ folgen aufeinander in dem Sinne, wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Diese Regel ist identisch mit der Ampèreschen Schwimmregel, wie man erkennt, wenn man den Daumen der rechten Hand der Richtung vom Fuße zum Kopfe parallel und den Zeigefinger nach vorn streckt; der Mittelfinger weist dann nach links. Wir haben damit das Biot-Savartsche Gesetz gewonnen, welches in der Lehre vom Elektromagnetismus eine so wichtige Rolle spielt. Dabei ist zu beachten, daß die Zerlegung des Ausdruckes (110) in Beiträge der einzelnen Wirbelelemente einigermaßen willkürlich ist; ein Wirbelelement für sich allein kann nicht existieren, sondern nur die geschlossene Wirbellinie als Ganzes; nicht den hypothetischen Beiträgen der einzelnen Wirbelelemente, sondern nur ihrer Vektorsumme (110) kommt eine physikalische Bedeutung zu.

Man kann nun das Feld einer Wirbellinie noch von einem wesentlich anderen Standpunkte aus betrachten. Dasselbe ist nämlich, von der Wirbellinie selbst abgesehen, wirbelfrei und muß sich daher von einem skalaren Potentiale φ ableiten. Freilich ist dieses Potential nicht, wie das soeben untersuchte Vektorpotential, einwertig, sondern es nimmt bei jeder Umkreisung der Wirbellinie um $4\pi\tau$ ab. Indessen kann man diese Vieldeutigkeit beseitigen, wenn man irgendeine von der Wirbellinie umrandete Fläche f_{12} konstruiert und diese aus dem Felde ausschließt. Alsdann entsteht ein Feld, welches überall quellenfrei und wirbelfrei ist, und das f_{12} als Unstetigkeitsfläche besitzt. Diese Unstetigkeitsfläche des wirbelfreien Feldes ist nun nach den Regeln des § 23 zu behandeln. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ selbst hat zu beiden Seiten der Fläche den gleichen Wert; denn die Fläche verläuft ja, von der Randkurve abgesehen, in dem Gebiete der stetigen Strömung. Die Flächendivergenz ist mithin Null. Das Potential hingegen erfährt eine Abnahme

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{v}_s\, ds = 4\pi\tau,$$

wenn man, der Strömung der Flüssigkeit folgend, von der Seite (1) der Unstetigkeitsfläche, die Wirbellinie umkreisend zur Seite (2) gelangt; es wächst um $4\pi\tau$ beim Durchschreiten der Fläche. Diese Unstetigkeit des Potentiales war es, die wir im § 23 durch eine Doppelschicht von Quellen darstellten. Wir zeigten daselbst, daß durch die Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und des Potentiales das quellenfreie Feld eindeutig bestimmt ist. Mithin ist das Feld einer Wirbellinie identisch mit dem Felde einer homogenen Doppelschicht, die auf einer von der Wirbellinie umrandeten Fläche ausgebreitet ist. Dabei ist die positive Seite der Doppelschicht durch die Ampèresche Regel der Wirbellinie zugeordnet. Das vektoriell aufgefaßte Moment der Doppelschicht, das im § 23 mit $\tau \cdot \mathfrak{n}$ bezeichnet wurde, und das von der negativen nach der positiven Seite der Doppelschicht weist, entspricht dem durch $d\mathfrak{s}$ festgelegten Umlaufssinn längs der Wirbellinie, wie der Fortschreitungssinn der Umlaufsbewegung bei einer Rechtsschraube. Das Moment der Wirbellinie wird durch $4\pi\tau$ dargestellt, wo τ eine stets positive Größe ist.

Wir können jetzt die im § 23 für das Potential einer homogenen Doppelschicht abgeleitete Beziehung (89):

$$\varphi = \pm\, \tau \cdot \Omega \tag{111}$$

unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen. Ω stellt dabei den körperlichen Winkel dar, unter dem vom Aufpunkte aus die Doppelschicht erscheint, mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen, je nachdem der Aufpunkt sich auf der positiven oder negativen Seite der Doppelschicht befindet. Gehen wir von der Doppelschicht zur äquivalenten Wirbellinie über, so haben wir vom Aufpunkte aus Gerade durch die Punkte der Wirbellinie zu legen und so die Wirbellinie auf die um den Aufpunkt als Mittelpunkt gelegte Einheitskugel zu projizieren; der Flächeninhalt der Projektion ist Ω. Je nachdem der Umlaufssinn um diese Flächenstücke der Einheitskugel durch den Umlaufssinn der Wirbellinie in

dem einen oder anderen Sinne bestimmt wird, hat man in (111) $\pm \Omega$ zu setzen. Hiernach ist klar, daß das Potential einer Doppelschicht nur von der Randkurve abhängt. Es erledigt sich auch die Frage nach dem Potential einer Doppelschicht, für deren Stücke der Aufpunkt bald auf der positiven, bald auf der negativen Seite liegt. Hier wird die auf die Einheitskugel projizierte Randkurve sich selbst schneiden und demgemäß die Flächenstücke der Einheitskugel bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne umlaufen; danach sind diese mit positivem bzw. negativem Vorzeichen in Rechnung zu ziehen. Endlich wird auch die zu Ende des § 23 gemachte Bemerkung verständlich, daß am Rande der Doppelschicht die angewandte Rechnungsmethode unzulässig wird. In der Tat ist hier die Geschwindigkeit der Strömung unendlich, und es ist die Randkurve durch eine Röhre aus dem Felde auszuschließen, wenn man mit einer ungeschlossenen Doppelschicht operiert.

Zeigt die Äquivalenz von Doppelschicht und Wirbellinie manche der Resultate, die für erstere vom Standpunkte des Quellenfeldes aus gewonnen wurden, in neuer Beleuchtung, so gestattet sie anderseits, das Feld der Wirbellinie auf Grund der Theorie der wirbelfreien Felder zu berechnen, ohne das Vektorpotential zu benutzen. Wir wollen diese Ableitung angeben und uns davon überzeugen, daß auch auf diesem Wege die Relation (110) erhalten wird. Wir berechnen den Gradienten des Potentiales (111), wobei wir der Einfachheit wegen den Aufpunkt auf der positiven Seite der zugeordneten Doppelschicht annehmen; dann wird

$$\mathfrak{v} = -\nabla\varphi = -\tau \cdot \nabla_a \Omega.$$

Hierbei stellt $\nabla_a \Omega$ die Änderung vor, welche der körperliche Winkel Ω erfährt, wenn der Aufpunkt um die Längeneinheit verschoben wird. Verschiebt man statt dessen die Winkellinie translatorisch, so ist, da Ω nur von der relativen Lage von Aufpunkt und Wirbellinie abhängt, nach § 21

$$\mathfrak{v} = \tau \cdot \nabla_q \Omega$$

zu setzen. Der durch Verrückung des Wirbelfadens bei festgehaltenem Aufpunkte entstehende Zuwachs von Ω setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten der auf die Einheitskugel um den Aufpunkt projizierten Flächenelemente, welche die Elemente $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie bei der Verrückung bestreichen; diese Flächenelemente sind so zu behandeln, als ob sie mit Doppelschichten vom Momente 1 belegt wären; deren Potentiale zusammengenommen ergeben den Zuwachs von Ω. Verschiebt man nun den ganzen Wirbelfaden in der durch den Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$ festgelegten Richtung um die Längeneinheit, so bestreicht das Element $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie das Parallelogramm

$$[\mathfrak{t}_1 d\mathfrak{s}];$$

die Projektion desselben auf die Einheitskugel wird positiv in Rechnung zu ziehen sein, wenn der jenes Vektorprodukt darstellende, auf der Ebene von $\mathfrak{t}_1$ und $d\mathfrak{s}$ senkrechte Vektor mit dem von $d\mathfrak{s}$ nach dem Aufpunkte hingezogenen Radiusvektor einen spitzen Winkel einschließt; denn in diesem Falle liegt der Aufpunkt auf der positiven Seite der hinzukommenden Doppelschicht. In dem entgegengesetzten Falle, wo jener Winkel ein stumpfer ist, liegt der Aufpunkt auf der negativen Seite. Beide Fälle faßt man zusammen, indem man den Beitrag, den $d\mathfrak{s}$ zum Zuwachs von Ω liefert, mit Rücksicht auf Formel (30) schreibt

$$\frac{1}{r^3} \cdot \mathfrak{r}[\mathfrak{t}_1 d\mathfrak{s}] = \frac{\mathfrak{t}_1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}].$$

Integriert man nun über die Wirbellinie, so resultiert

$$\mathfrak{t}_1 \int \frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]$$

als Zuwachs von Ω bei einer translatorischen Verrückung der Wirbellinie parallel einem beliebigen Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$. Wir erhalten mithin

$$\mathfrak{v} = \tau \cdot \nabla_Q \Omega = \tau \cdot \int \frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}],$$

eine Formel, die mit (110) identisch ist.

Eine andere Methode, die Äquivalenz von Wirbellinie und Doppelschicht zu kontrollieren, ist die, daß man dem Felde der Doppelschicht ein Vektorpotential zuordnet und dieses auf die Form (109) bringt. Wir gehen indessen an dieser Stelle hierauf nicht ein, da die Äquivalenz der beiden Felder genügend sichergestellt erscheint.

§ 30. Rechnungsregeln. Die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$.

Den Rechnungsregeln, die uns bisher bei der Entwickelung der Theorie der Vektorfelder begegneten, treten noch eine Reihe weiterer Regeln an die Seite.

Wir beginnen mit der Regel für den Curl des Produktes aus einem Skalar v und einem Vektor $\mathfrak{A}$

$$\operatorname{curl} v\mathfrak{A} = v \operatorname{curl} \mathfrak{A} + [\nabla v, \mathfrak{A}], \tag{112}$$

von deren Richtigkeit man sich durch Nachrechnen leicht überzeugt. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ der Gradient eines zweiten Skalars p

$$\mathfrak{A} = \nabla p,$$

so ist das Feld von $\mathfrak{A}$ wirbelfrei, mithin

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \nabla p = 0,$$

mithin

$$\operatorname{curl}\{v\nabla p\} = [\nabla v, \nabla p]. \tag{112a}$$

Die letzte Gleichung findet Anwendung, wenn es sich um die resultierende Kraft handelt, die in einer kompressiblen Flüssigkeit oder in einem Gase auf die Masseneinheit wirkt. Diese Kraft findet man entgegengesetzt gleich dem Produkte aus spezifischem Volumen v und dem Druckgradienten ∇p. Der Curl dieses Produktes steht links; integriert man ihn über eine ungeschlossene Fläche f, so ergibt der Stokessche Satz

$$-\int_P^P v \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds = -\int df [\nabla v, \nabla p]_\nu. \tag{112b}$$

Links steht jetzt die Arbeit, welche die genannte, von dem Drucke der umgebenden Flüssigkeit herrührende

Kraft bei Verschiebung der Masseneinheit auf einem geschlossenen Wege leistet. Soll diese Kraft für einen beliebigen geschlossenen Weg Null sein, so muß der Gradient von v überall parallel dem Gradienten von p sein, d. h. es müssen die Flächen konstanten spezifischen Volumens und konstanten Druckes zusammenfallen. Ist das nicht durchweg der Fall, so wird es Wege geben, für die das Linienintegral der Kraft von Null verschieden ist.

Es wurde bereits häufig die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)$ auf Skalaren angewandt. $(\mathfrak{A}\nabla)\varphi$ gab allgemein den Zuwachs an, den der Skalar φ beim Fortschreiten in der Richtung von $\mathfrak{A}$ erfuhr; derselbe war auf die Längeneinheit zu beziehen und mit dem Betrage von $\mathfrak{A}$ zu multiplizieren. Die gleiche Operation können wir nun auch auf einen Vektor $\mathfrak{B}$ anwenden. Ist $\mathfrak{A}$ ein Einheitsvektor, so stellt $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs dar, den der Vektor $\mathfrak{B}$ erfährt, wenn man in seinem Felde in der durch $\mathfrak{A}$ angezeigten Richtung fortschreitet. Ist $\mathfrak{A}$ kein Einheitsvektor, so geht der Betrag von $\mathfrak{A}$ als Faktor ein. Es sind die Komponenten von $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$;

$$(113)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_x = \mathfrak{A}_x\dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\dfrac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z}, \\ (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_y = \mathfrak{A}_x\dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\dfrac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}, \\ (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_z = \mathfrak{A}_x\dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\dfrac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir berechnen jetzt den Vektor

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}.$$

Seine x-Komponente ist

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_y\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} - \mathfrak{A}_x\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \mathfrak{A}_x\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}.$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgt

$$(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}_x - \mathfrak{B}_x\cdot\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_y\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \mathfrak{B}_x\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \mathfrak{B}_z\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \mathfrak{B}_x\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$$

und durch Subtraktion der vorigen Formel von dieser

$$\{(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\}_x$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z).$$

Hier steht rechts die x-Komponente von $\mathrm{curl}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Es gilt mithin für den Curl des Vektorproduktes die Rechnungsregel

$$\mathrm{curl}\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}. \tag{114}$$

Wir berechnen anderseits

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}].$$

Die x-Komponente ist

$$\mathfrak{A}_x\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial z} + \mathfrak{A}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) - \mathfrak{A}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial x}\right)$$
$$= \mathfrak{A}_x\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial x}.$$

Addieren wir hierzu die durch Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entstehende Beziehung, so erhalten wir:

$$\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}]. \tag{115}$$

In den nächsten Paragraphen werden die Regeln (114), (115) Anwendung finden.

§ 31. Zeitliche Änderung eines Vektorfeldes, beurteilt von einem bewegten Bezugssysteme aus. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik.

Bisher haben wir nur stationäre Vektorfelder untersucht, d. h. solche, die sich mit der Zeit nicht ändern. Die Gesetze der zeitlichen Änderung eines Vektorfeldes gehören nicht zu der allgemeinen Geometrie der Vektorfelder, sondern zu der Dynamik der speziellen Kraftfelder und Strömungsfelder. Immerhin gibt es einige allgemeine Regeln darüber, wie man die zeitliche Änderung eines Vektorfeldes, die man gegeben denkt für ein ruhendes Bezugssystem, umzurechnen hat auf ein bewegtes Bezugssystem. Die analoge Aufgabe

lösten wir in den Paragraphen (12), (13) für den einzelnen, am Koordinatenanfang abgetragenen Vektor. Wir denken uns jetzt ein starres Gerüst, welches sich durch das Vektorfeld bewegt, indem die Achsen zunächst sich selbst parallel bleiben. Es sei $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit des Gerüstes. Wir nennen $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ die zeitliche Änderung, die der Vektor $\mathfrak{A}$ an einem im Raume festen Punkte erfährt, $\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}$ die zeitliche Änderung an einem Punkte des Gerüstes. Die Differenz

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

ist derjenige Zuwachs, den der Vektor $\mathfrak{A}$ infolge der Bewegung des Gerüstes durch das Feld erfährt, auch wenn das Feld stationär ist. Dieser von einem mitbewegten Beobachter festzustellende Zuwachs beträgt $(\mathfrak{v}_0 \nabla)\mathfrak{A}$. Es ist mithin der gesamte Zuwachs, beurteilt von einem translatorisch bewegten Bezugssystem aus,

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}_0 \nabla)\mathfrak{A}. \tag{116}$$

Hat man es z. B. mit einem bewegten Flüssigkeitsteilchen zu tun, so stellt $\frac{\partial' \mathfrak{v}}{\partial t}$ die Beschleunigung des betreffenden Massenelementes dar, vorausgesetzt, daß man das Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, die eben jenem Massenteile zukommt. Hier gilt

$$\frac{\partial' \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla)\mathfrak{v}.$$

Die soeben berechnete Beschleunigung ist nun nach den Grundgesetzen der Mechanik der auf die Masseneinheit bezogenen Kraft gleich. Schließt man Reibung aus, so setzt sich die Kraft zusammen aus der Kraft der Gravitation, die sich aus einem Potentiale Φ ableitet, und der von den benachbarten Flüssigkeitsteilchen ausgeübten Kraft $-v \nabla p$, von der im vorigen Paragraphen die Rede war. Die erhaltene Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla)\mathfrak{v} = -\nabla \Phi - v \nabla p \tag{117}$$

ist die Grundgleichung der Hydrodynamik in der Form, die man als „Eulersche Form“ zu bezeichnen pflegt, und die ein im Raume festes Bezugssystem zugrunde legt.

Die Rechnungsregel (115) ergibt

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}\nabla\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}],$$

wenn $\mathfrak{w} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}$ wieder den Wirbel bezeichnet. Es ist daher

$$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = -\nabla\{\Phi + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}^2\} - v\nabla p + [\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]. \tag{118}$$

Bisher wurde das starre Gerüst nur translatorisch durch das Vektorfeld bewegt. Wir wollen jetzt auch Rotationen in Betracht ziehen, so daß die Geschwindigkeit der Punkte des Gerüstes durch Gleichung (35) bestimmt ist,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}],$$

woraus

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0, \quad \operatorname{curl}\mathfrak{v} = 2\mathfrak{u}$$

folgt.

Die zeitliche Änderung $\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t}$ in diesem allgemeineren Falle setzt sich jetzt aus drei Teilen zusammen. Erstens der zeitlichen Änderung $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$ des Vektors $\mathfrak{A}$, die an einem im Raume festen Punkte stattfindet; zweitens der Änderung, die infolge der Bewegung des betreffenden Punktes des Gerüstes durch das Feld einem mitbewegten Beobachter stattzufinden scheint: $(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A}$; drittens endlich kommt die Änderung in Betracht, die infolge der Rotation des Bezugssystemes stattfindet, wenn wir die zeitliche Änderung von $\mathfrak{A}$ eben von dem rotierenden Systeme aus beurteilen, d. h. $\mathfrak{A}$ auf ein im Gerüste festes Achsensystem beziehen. Nach § 13 ist die letzte Änderung $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{u}]$. Wir erhalten daher

$$\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathfrak{u}] \tag{119}$$

als resultierende, von dem rotatorisch und translatorisch bewegten Gerüste aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$.

Man sieht leicht ein, daß

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{v} = -[\mathfrak{A}\,\mathfrak{u}]$$

zu setzen ist; da ferner

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = 2\mathfrak{u}$$

gilt, so ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{u}] = [\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{v}] + (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{v},$$

mithin nach (115)

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]. \tag{119a}$$

Setzt man anderseits in (119)

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{u}] = -(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{v}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

und berücksichtigt die Regel (114), so wird

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{A}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A}. \tag{119b}$$

Für die Berechnung der Divergenz, sowie des Curl und des Gradienten ist es selbstverständlich ganz gleichgültig, ob man ein im Raume festes oder ein bewegtes Bezugssystem zugrunde legt. Sind doch diese Größen vom Koordinatensysteme unabhängig definiert. Wenn man freilich mit Komponenten operiert und diese vom ruhenden auf das bewegte Bezugssystem umrechnet, so ist die relative Lage der beiden Achsenkreuze zu dem betreffenden Zeitpunkte in Betracht zu ziehen, aber die Umrechnung geschieht genau so, als ob das bewegte System in seiner augenblicklichen Lage ruhte. Rechnet man mit den Vektoren selbst, so kommt die Bewegung des Bezugssystemes nur für die durch Differentiation nach der Zeit abgeleiteten Vektoren in Betracht, nicht für die von der augenblicklichen räumlichen Verteilung des Feldes abhängigen Vektoren und Skalaren.

§ 32. Zeitliche Änderung von Linien- und Flächenintegralen, bezogen auf bewegte Linien und Flächen. Die Wirbelsätze von Helmholtz.

Es soll die Aufgabe gestellt sein, die zeitliche Änderung eines Linienintegrales

$$\int_1^2 \mathfrak{A}_s \, ds,$$

erstreckt über eine ungeschlossene Linie, oder eines Flächenintegrales

$$\int \mathfrak{B}_\nu df,$$

erstreckt über eine ungeschlossene Fläche, zu berechnen, wenn die Punkte der Linie oder der Fläche sich in beliebiger stetiger Weise bewegen. Wird die Linie oder Fläche als Ganzes bewegt, ohne daß die relative Lage ihrer Punkte sich ändert, so ist die Lösung auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen zu erhalten. Man führt dann ein starres Gerüst ein, in dem die betreffende Kurve oder Fläche befestigt ist; von diesem aus betrachtet sind ds, df feste Linien- und Flächenelemente, man hat daher

$$\frac{d}{dt}\int_1^2 \mathfrak{A}_s ds = \int_1^2 \frac{\partial' \mathfrak{A}_s}{\partial t} \cdot ds, \quad \frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu = \int df \frac{\partial' \mathfrak{B}_\nu}{\partial t},$$

wobei die Komponenten von $\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t}$, $\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t}$ parallel zur bewegten Kurve bzw. senkrecht zur bewegten Fläche nach den Regeln des vorigen Paragraphen zu berechnen sind.

Wir wollen indessen die Aufgabe allgemeiner fassen, indem wir beliebige stetige Bewegungen der Kurve bzw. Fläche zulassen, über welche das Integral zu erstrecken ist. Wir betrachten zunächst das Linienintegral

$$\int_1^2 \mathfrak{A} d\mathfrak{s}.$$

Seine zeitliche Änderung wird sich zusammensetzen aus derjenigen, die stattfinden würde, wenn die Kurve $\mathfrak{s}$ ruhte; diese beträgt

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \cdot d\mathfrak{s}.$$

Dazu kommt die Änderung, die infolge der Bewegung der Kurve durch das Vektorfeld eintritt; für deren Berechnung kommt nur das Feld des Vektors $\mathfrak{A}$ zur Zeit t in Betracht, aber die Lagen der Integrationskurve zu zwei Zeitpunkten t und $t + dt$. Wir wollen diese Lagen durch Angabe der Endpunkte (1, 2) bzw. (1′, 2′) kennzeichnen; dann ist die totale Änderung des Linienintegrales in der Zeit dt.

$$dt\frac{d}{dt}\int_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = dt\int_1^2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\,d\mathfrak{s} + \int_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} - \int_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}.$$

Nun ist

$$\int_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} - \int_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \int_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} + \int_2^1 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}.$$

Wir fügen die Integrale hinzu, die sich auf die Kurvenstücke (1 1′) und (2′ 2) beziehen; (1 1′) und (2 2′) sind die vom Anfangs- und Endpunkte der Kurve in der Zeit dt beschriebenen Wege, daher ist

$$\int_1^{1'} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_1\,dt \quad \text{und} \quad \int_{2'}^{2} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = -(\mathfrak{A}\mathfrak{v})_2\,dt.$$

Das Ergebnis ist das Integral von $\mathfrak{A}$, erstreckt über die geschlossene Kurve 1′ 2′ 2 1 1′; dasselbe wird mit Hilfe des Stokesschen Satzes umgerechnet in das Integral von curl $\mathfrak{A}$, erstreckt über die von der Kurve umrandete Fläche. Diese Fläche aber setzt sich zusammen aus den Flächenstücken $[\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}]dt$, die von den einzelnen Elementen $d\mathfrak{s}$ in der Zeit dt bestrichen werden. Die Reihenfolge der Faktoren in dem Vektorprodukte ist hier bereits so gewählt, daß der Umlaufssinn mit dem oben festgesetzten 1′ 2′ 2 1 1′ des Integrationsweges übereinstimmt. Zum Flächenintegrale von curl $\mathfrak{A}$ liefert jedes Flächenelement den Beitrag

$$dt \cdot \text{curl}\,\mathfrak{A} \cdot [\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}] = dt \cdot d\mathfrak{s}[\text{curl}\,\mathfrak{A}, \mathfrak{v}].$$

Mithin erhalten wir als Folge des Stokesschen Satzes

$$\int_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} + \int_{2}^{1} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} + (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_1\, dt - (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_2\, dt = \mathrm{d}t \cdot \int_{1}^{2} d\mathfrak{s}\,[\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}, \mathfrak{v}].$$

Schreiben wir hier

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{v})_1 - (\mathfrak{A}\mathfrak{v})_2 = -\int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \cdot \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{v}),$$

so erhalten wir

$$\int_{1'}^{2'} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} - \int_{1}^{2} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = dt \cdot \int_{1}^{2} d\mathfrak{s}\{\nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v}\ \mathrm{curl}\ \mathfrak{A}]\}$$

als denjenigen Teil der Änderung des Linienintegrales, der von der Bewegung der Kurve herrührt.

Es folgt daher

$$\frac{d}{dt}\int_{1}^{2} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v}\ \mathrm{curl}\ \mathfrak{A}]\right\}. \tag{120}$$

Für eine als starr bewegte Kurve ist dieses Resultat bereits aus der Formel (119a) des vorigen Paragraphen enthalten.

Als Beispiel betrachten wir den Vektor $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeit einer beliebigen reibungslosen Flüssigkeit. Wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{v}$, $\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{w}$ gesetzt, so wird

$$\frac{d}{dt}\int_{1}^{2} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \nabla \mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\mathfrak{w}]\right\},$$

und nach (118)

$$\frac{d}{dt}\int_{1}^{2} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_{1}^{2} d\mathfrak{s} \left\{-\nabla \Phi + \frac{1}{2}\nabla \mathfrak{v}^2 - \nu \nabla p\right\}.$$

Ist die Kurve geschlossen, so folgt als zeitliche Änderung des Linienintegrales der Geschwindigkeit

$$(121) \qquad \frac{d}{dt}\int_1^1 \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = -\int_1^1 d\mathfrak{s}\cdot v\nabla p = -\int_1^1 ds\, v\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Ist der Zustand der Flüssigkeit so beschaffen, daß überall die Flächen konstanten spezifischen Volumens v und konstanten Druckes p zusammenfallen, so verschwindet nach § 30 das Linienintegral der rechten Seite für die geschlossene Kurve; in diesem Falle wird

$$\int_1^1 \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}$$

konstant für jede mit der Flüssigkeit bewegte Kurve, und es gilt der Satz: Das Linienintegral der Geschwindigkeit, erstreckt über eine beliebige mit der Flüssigkeit bewegte geschlossene Kurve, bleibt bei der Bewegung ungeändert.

Dieser Satz enthält eine wichtige, von Helmholtz zuerst erkannte Eigenschaft reibungsloser Flüssigkeitsbewegungen.

Wir behandeln jetzt das Flächenintegral

$$\int df\mathfrak{B}_\nu;$$

seine zeitliche Änderung

$$dt\cdot\frac{d}{dt}\int df\mathfrak{B}_\nu$$

im Zeitelemente dt setzt sich zusammen aus der Änderung, die bei festgehaltener Fläche f in der gleichen Zeit stattfinden würde,

$$dt\cdot\int df\frac{\partial\mathfrak{B}_\nu}{\partial t},$$

und aus der Änderung, welche infolge der Bewegung der Fläche f durch das Vektorfeld eintritt. Bei der Berechnung ist nur das Feld zur Zeit t in Betracht zu ziehen, aber die

Lagen der Fläche f zu zwei Zeitpunkten t und $t + dt$. Wir wollen diese als f und f' unterscheiden. Es ist die infolge der Bewegung der Fläche hinzukommende Änderung

$$\int df' \mathfrak{B}_\nu - \int df \mathfrak{B}_\nu.$$

Die beiden ungeschlossenen Flächen f', f werden nun zu einer geschlossenen Fläche F ergänzt, indem die von der Randkurve $\mathfrak{s}$ im Zeitelemente dt bestrichene Fläche hinzugefügt wird; dabei bestreicht jedes Linienelement $d\mathfrak{s}$ das Flächenelement $dt[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{v}]$. Die Reihenfolge der Faktoren in dem Vektorprodukte ist hier so gewählt, daß der dem Flächenelemente zugeordnete Vektor der Richtung nach mit der äußeren Normale der geschlossenen Fläche F übereinstimmt, sofern die dem Umlaufssinn der Randkurve $\mathfrak{s}$ zugeordneten Normalen von f, f' einen spitzen Winkel mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ bilden; diese Normalen sollen es auch sein, nach denen die Komponente von $\mathfrak{B}$ in den obigen über die Flächen f, f' erstreckten Integralen zu nehmen ist. Auf f' stimmt diese Normalenrichtung mit der äußeren Normalen der geschlossenen Fläche überein, auf f mit der inneren Normalen. Es wird daher nach dem Gaußschen Satze

$$\int df' \mathfrak{B}_\nu - \int df \mathfrak{B}_\nu + dt \cdot \int \mathfrak{B}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{v}] = \int dv \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

Hier ist dv ein Element des von der geschlossenen Fläche F begrenzten Raumes; da diese Raumelemente von den Flächenelementen df während der Zeit dt bestrichen werden, so ist

$$dv = dt \cdot df \cdot \mathfrak{v}_\nu$$

zu setzen. Schreiben wir ferner

$$\mathfrak{B}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{v}] = -d\mathfrak{s}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}],$$

so wird

$$\int df' \mathfrak{B}_\nu - \int df \mathfrak{B}_\nu = dt \left\{ \int df \mathfrak{v}_\nu \operatorname{div} \mathfrak{B} + \int d\mathfrak{s}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}] \right\}.$$

Die Anwendung des Stokesschen Satzes auf das Linienintegral ergibt schließlich

$$\int df' \mathfrak{B}_\nu - \int df \mathfrak{B}_\nu = dt \cdot \int df \{\mathfrak{v}_\nu \operatorname{div} \mathfrak{B} + \operatorname{curl}_\nu [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\}$$

als diejenige zeitliche Änderung des Flächenintegrales, welche infolge der Bewegung der Fläche f eintritt. Die resultierende, auf die Zeiteinheit berechnete Änderung ist daher

$$(122)\quad \frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu = \int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{B}\right\}_\nu .$$

Für eine starr bewegte Fläche ist dieses Resultat bereits in der Formel (119b) des vorigen Paragraphen enthalten.

Ist

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

so ist nach dem Stokesschen Satze

$$\int df \mathfrak{B}_\nu = \int ds \mathfrak{A},$$

es wird folglich die linke Seite von (122) nach (120) gleich dem über s erstreckten Integrale

$$\frac{d}{dt}\int ds \mathfrak{A} = \int ds \left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]\right\}.$$

Wir wollen uns davon überzeugen, daß dieses Linienintegral mit der rechten Seite von (122) identisch ist; wir formen dasselbe mit Hilfe des Stokesschen Satzes in das Flächenintegral um

$$\int df \left\{\operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{curl} [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]\right\}_\nu .$$

Da nun

$$\operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad - \operatorname{curl} [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}] = \operatorname{curl} [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0,$$

so ist die Identität in der Tat nachgewiesen.

Wir wenden die Formel (122) auf den Wirbel $\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v}$ an, indem wir die zeitliche Änderung des Wirbels für ein

bewegtes Flüssigkeitsteilchen verfolgen. Offenbar ist die linke Seite der so erhaltenen Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{w}_\nu = \int df\left\{\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]\right\}$$

mit derjenigen von (121) identisch. Nach (118) wird anderseits

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} = -\operatorname{curl} v\nabla p - \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]$$

und nach (112a)

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{v}] = -[\nabla v, \nabla p],$$

mithin

$$\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{w}_\nu = -\int df[\nabla v, \nabla p]_\nu. \tag{123}$$

Sind insbesondere überall die Gradienten von v und p einander parallel, so wird

$$\frac{d}{dt}\int df\,\mathfrak{w}_\nu = 0. \tag{123a}$$

Diese Relation enthält eine andere Form des Helmholtzschen Wirbelsatzes: Das Flächenintegral des Wirbels, genommen über eine mit der Flüssigkeit bewegte Fläche, ist konstant, wenn die Flächen konstanten Druckes und konstanten spezifischen Volumens durchweg zusammenfallen.

Fallen jene Flächen nicht zusammen, so ist nach (123) für jedes Flüssigkeitsteilchen die Achse des pro Sekunde erzeugten Wirbels senkrecht zu den Gradienten von v und p gerichtet, sie ist mithin parallel der Schnittkurve der Flächen konstanten Druckes und konstanten spezifischen Volumens.

Die entstehende Flüssigkeitszirkulation umkreist die Schnittkurve in dem Sinne, daß auf die Richtung des zunehmenden spezifischen Volumens (abnehmender Dichte) die Richtung abnehmenden Druckes folgt. Dieses Gesetz beherrscht die durch ungleichförmige Erwärmung der Luft entstehenden atmosphärischen Wirbel.

Zweiter Abschnitt.

Das elektrische Feld.

Erstes Kapitel.

Das elektrostatische Feld im Luftraume.

§ 33. Elektrizitätsmenge und elektrische Feldstärke.

Reibt man eine Siegellackstange mit einem Stück Katzenfell, so werden diese Körper und der sie umgebende Raum in einen eigentümlichen Zustand versetzt, der sich dadurch kundgibt, daß leichte, in der Nähe befindliche Teilchen in Bewegung geraten; man sagt, jene Körper sind durch Reibung „elektrisch“ geworden, der umgebende Raum ist ein „elektrisches Feld“. Der elektrische Zustand haftet nicht an der Siegellackstange und an dem Katzenfell; er wird auf Metalle, die mit diesen Körpern in Berührung gebracht werden, übertragen. Die Entstehung des elektrischen Zustandes ist nicht an den Vorgang der Reibung gebunden; ein Metallstück, das durch einen metallischen Draht mit einem der Pole eines galvanischen Elementes in Verbindung steht, äußert, auch nach Entfernung des Drahtes, gleichfalls elektrische Wirkungen.

Ein elektrisches Metallstück mag sich im Luftraume befinden. Das elektrische Feld in seiner Umgebung untersucht man mit Hilfe eines Probekörpers, etwa eines mit Goldblatt überzogenen Holundermarkkügelchens, das seinerseits durch Berührung mit der geriebenen Siegellackstange oder mit dem Katzenfell elektrisch gemacht ist. Dieser Probekörper wird im elektrischen Felde von einer Kraft $\mathfrak{K}$ angegriffen. Wir denken uns diese Kraft $\mathfrak{K}$ gemessen; sie wird nach Betrag

und Richtung verschieden ausfallen für die verschiedenen Punkte des Feldes; sie wird auch für einen bestimmten Punkt des Feldes verschieden ausfallen, je nach der Art, wie das Holundermarkkügelchen elektrisch gemacht ist. In der letzteren Hinsicht jedoch herrscht eine sehr einfache Gesetzmäßigkeit: war der Probekörper mit der Siegellackstange in Berührung, so ist die Richtung der Kraft $\mathfrak{K}$, die er in einem gegebenen Punkte des Feldes erfährt, eine ganz bestimmte, und nur der Betrag hängt von der Art der Behandlung ab; war er mit dem Katzenfell in Berührung, so ist die Richtung der Kraft die entgegengesetzte, ihr Betrag hängt wieder von der Art der Behandlung ab. Wir werden so dazu geführt, die Kraft

$$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}$$

zu setzen, wo der Skalar e von dem elektrischen Zustande des Probekörpers abhängt, während der Vektor $\mathfrak{E}$ von diesem Zustande unabhängig ist, aber für die verschiedenen Punkte des Feldes verschiedene Richtung und verschiedenen Betrag besitzt. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß für zwei verschieden behandelte Probekörper, die nacheinander an denselben Punkt des Feldes gebracht werden, die Kräfte in einem bestimmten Verhältnis

$$\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{K}_2 = e_1 : e_2$$

stehen, das für verschiedene Punkte des Feldes das gleiche ist. Ist für den ersten Probekörper e_1 gegeben, so ist für jeden anderen e_2 hiernach bestimmt; alsdann ist $\mathfrak{E}$ für die einzelnen Punkte des Feldes mit Hilfe eines beliebigen Probekörpers zu ermitteln.

Den skalaren Faktor e im Ausdrucke

(124) $$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}$$

nennt man die „elektrische Ladung" des Probekörpers oder die Menge der auf ihm befindlichen Elektrizität, den vektoriellen Faktor $\mathfrak{E}$ die „elektrische Feldstärke". Diese Definition der Elektrizitätsmenge und der elektrischen Feldstärke ist eindeutig, sobald

die Einheit der Elektrizitätsmenge festgelegt ist. Der entgegengesetzten Richtung der Kraft auf zwei mit der Siegellackstange bzw. mit dem Katzenfell berührte Probekörper trägt man dadurch Rechnung, daß man positive und negative Elektrizität unterscheidet. Man hat ganz willkürlich der Elektrizität des mit dem geriebenen Katzenfell berührten Kügelchens das positive Vorzeichen gegeben und infolgedessen der Elektrizität der geriebenen Siegellackstange das negative. Demgemäß hat man als Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ diejenige der Kraft bezeichnet, welche der mit dem Katzenfell berührte Probekörper erfährt.

Da der Vektor $\mathfrak{A}$ polar ist, so sind über die Natur des Skalars e und des Vektors $\mathfrak{E}$ nur zwei Annahmen möglich. Entweder e ist ein eigentlicher Skalar und $\mathfrak{E}$ ein polarer Vektor, oder e ist ein Pseudoskalar und $\mathfrak{E}$ ein axialer Vektor. Wir wollen uns jetzt schon für die erstere Annahme entscheiden, indem wir die elektrische Ladung als Skalar im eigentlichen Sinne betrachten. Zunächst ist diese Festsetzung allerdings durchaus hypothetisch, sie findet ihre Rechtfertigung erst in einer ziemlich entfernten Folgerung. Es würde sich indessen nicht empfehlen, in die Definition der Grundbegriffe eine Unbestimmtheit einzuführen, die später doch wieder zu beseitigen wäre.

Der Erfahrungssatz, auf dem die Definition der elektrischen Feldstärke fußte, ist nicht unbeschränkt gültig. Seine Gültigkeit hört auf genau zu sein, wenn der Probekörper zu nahe an dem geladenen Metall sich befindet, und zwar um so eher, je größer die Ladung des Probekörpers ist. Der Satz wird auch dann ungenau, wenn die Feldstärke zu stark mit dem Orte veränderlich ist, um so mehr, je größer die Abmessungen des Probekörpers sind. Wir werden später die Gründe dieser Abweichungen erkennen und den Ausdruck für die Kraft entsprechend korrigieren. Für das erste indessen müssen wir uns eines hinreichend kleinen und hinreichend schwach geladenen Probekörpers bedienen, wenn wir auf Grund der Gleichung (124) das elektrische Feld ermitteln.

Wir beschränken uns in diesem ersten Kapitel auf das elektrische Feld, das ruhende elektrisch geladene Metallkörper umgibt. Ändert sich dieses mit der Zeit nicht und ist seine Erhaltung nicht von Wärmeentwickelung begleitet, so wird es als „elektrostatisches Feld“ bezeichnet. Das elektrostatische Feld bleibt also ohne Energiezufuhr bestehen. Hierdurch unterscheidet es sich von anderen, zeitlich gleichfalls nicht wechselnden elektrischen Feldern, deren Bestehen von fortwährender Wärmeentwickelung begleitet ist, und deren Erhaltung daher dauernde Energiezufuhr erfordert. Felder der letzteren Art schließen wir zunächst von der Betrachtung aus. Das Feld ruhender Elektrizität im Luftraume ist ein elektrostatisches, wenigstens dann, wenn die Feldstärke nicht allzu groß wird. Übersteigt die Feldstärke gewisse, vom Luftdrucke abhängige Grenzen, so treten allerdings Entladungserscheinungen ein, die von Licht- und Wärmeentwickelung begleitet sind. Von diesen sehen wir, der historischen Entwickelung der Elektrizitätslehre folgend, zunächst ab.

§ 34. Der Kraftfluß.

Mit Hilfe des Probekörpers denke man sich in jedem Punkte des Raumes den Vektor $\mathfrak{E}$ konstruiert und so das elektrische Feld ermittelt. Die hydrodynamische Analogie, die in den früheren Abschnitten (§ 16ff.) behandelt wurde, vergleicht das elektrische Feld mit dem Felde einer Flüssigkeitsströmung; dabei wird die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch das Flächenelement df in dem durch die Normalenrichtung ν angezeigten Sinne fließt, durch $\mathfrak{E}_\nu \cdot df$ gegeben. Man nennt nun $\mathfrak{E}_\nu df$ den „Kraftfluß“ durch das Flächenelement df und das über eine Fläche f erstreckte Integral

$$\int \mathfrak{E}_\nu df$$

den Kraftfluß durch die Fläche f. Dieser Kraftfluß läßt sich für jede im Felde verlaufende Fläche ermitteln. Es haben sich folgende Erfahrungssätze ergeben:

Der Kraftfluß, der durch eine geschlossene Fläche hindurchtritt, ist Null, wenn die Fläche keine elektrisch geladenen Körper einschließt. Der Kraftfluß ist von Null verschieden für solche Flächen, welche elektrisch geladene Körper einschließen. Er ist der gleiche für zwei Flächen, welche die nämlichen geladenen Körper einschließen.

Aus dem ersten dieser Sätze folgt durch Anwendung des Gaußschen Satzes (Gleichung 71)

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = 0 \tag{125}$$

in dem von elektrischer Ladung freien Raume; in diesem Raume ist demnach das elektrische Feld quellenfrei.

Der zweite Satz sagt aus, daß die Quellen des Feldes auf den elektrischen Körpern ihren Sitz haben. Der dritte Satz folgt aus den beiden ersten; denn zwischen zwei Flächen, welche die nämlichen geladenen Körper einschließen, liegen eben keine Quellen; es gilt in dem Raume, den sie gemeinsam begrenzen, die Gleichung (125), und es folgt aus dem Gaußschen Satze, daß aus diesem Raume im ganzen kein Kraftfluß heraustritt. Bezeichnet man nun bei jeder der Flächen diejenige Seite, auf der die geladenen Körper liegen, als die innere, die andere als die äußere, so folgt, daß der nach außen tretende Kraftfluß für beide Flächen der gleiche ist. Man zeigt weiter, daß der Kraftfluß durch eine Fläche, welche zwei geladene Körper einschließt, sich additiv zusammensetzt aus den Kraftflüssen durch zwei Flächen, welche nur je einen der beiden Körper umschließen. In der Tat ergibt die Anwendung des Gaußschen Satzes auf den von den drei Flächen begrenzten Raum, daß aus ihm im ganzen kein Kraftfluß heraustritt; es folgt, daß die Kraftflüsse durch die beiden Flächen zusammen gleich dem Kraftfluß durch die dritte, sie einschließende Fläche ist. Ebenso folgt, daß die Kraftflüsse durch eine beliebige Zahl von Flächen, von denen jede einen anderen geladenen Körper einschließt, sich additiv zusammensetzen zu dem Kraft-

fluß durch eine Fläche, welche alle diese Körper einschließt. Wir setzen die Ergebnisse zusammenfassend

$$\int df \cdot \mathfrak{E}_\nu = 4\pi \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i. \tag{126}$$

Dabei ist die Summe über alle von der geschlossenen Fläche eingeschlossenen Körper zu nehmen; e_i stellt eine für den elektrischen Zustand des betreffenden Körpers charakteristische Größe dar, welche in der hydrodynamischen Analogie (§ 21) die Ergiebigkeit der Quellen bedeutet, deren Sitz er ist. e_i ist die auf dem betreffenden Körper befindliche Elektrizitätsmenge. Der Faktor 4π in der Gleichung (126) ist ganz willkürlich; indem wir ihn hinzusetzen, legen wir die im vorigen Paragraphen noch unbestimmt gebliebene Einheit der elektrischen Ladung fest, und zwar in einer Weise, die zu dem sogenannten „absoluten elektrostatischen Maßsystem“ führt.

Die ruhende Elektrizität ist also sowohl Quelle für den elektrischen Kraftfluß, als auch Angriffspunkt für die elektrische Kraft. Daß diese beiden in den Gleichungen (126) und (124) formulierten Eigenschaften sich nicht widersprechen, wird später zu zeigen sein.

Man pflegt das elektrische Feld durch Zeichnung der sogenannten „Kraftlinien“ geometrisch darzustellen. Man zeichnet sie so, daß ihre Richtung diejenige des Vektors $\mathfrak{E}$ anzeigt, und daß die Kraftliniendichte, d. h. die Zahl der Kraftlinien, berechnet auf die Flächeneinheit einer senkrecht zu $\mathfrak{E}$ gelegten Fläche, überall proportional zum Betrage $|\mathfrak{E}|$ der elektrischen Feldstärke ist. Ist p ein Proportionalitätsfaktor, so ist die Zahl der ein beliebiges Flächenelement df durchsetzenden Kraftlinien gleich

$$p \cdot df \cdot |\mathfrak{E}| \cdot \cos(\mathfrak{E}, \nu) = p \cdot df \cdot \mathfrak{E}_\nu.$$

Setzt man den Proportionalitätsfaktor $p = 1$, so ist die „Zahl der Kraftlinien“ dem Kraftfluß gleich, setzt man $p = 4\pi$, so ist die Zahl der Kraftlinien, die aus einer geschlossenen

Fläche heraustritt, gleich der im Inneren der Fläche befindlichen Elektrizitätsmenge. Man pflegt die erstere Festsetzung zu bevorzugen, also von der Einheit der Ladung 4π Kraftlinien ausgehen zu lassen. Dabei wird die Zahl der Kraftlinien allerdings im allgemeinen keine ganze Zahl sein; aber auch bei der zweiten Festsetzung $p = 4\pi$ wird sie nur dann durch eine ganze Zahl ausgedrückt, wenn das für die Elektrizitätsmenge der Fall ist. In dem von uns akzeptierten elektrostatischen Einheitssysteme werden indessen auch die Elektrizitätsmengen im allgemeinen nicht durch ganze Zahlen gemessen, so daß diese Festsetzung vor jener ersten keinen Vorzug besitzt.

Die Kraftlinien beginnen auf den positiv geladenen Körpern, sie endigen auf den negativ geladenen. In dem von Elektrizität freien Felde können sie weder beginnen noch endigen. Es ist sehr bemerkenswert, daß alle uns bekannten Felder die gleiche Menge positiver, wie negativer Elektrizität enthalten. Bei der Elektrizitätserregung durch Reibung sowohl, wie bei allen sonstigen Arten der Elektrizitätserregung entsteht immer die gleiche Menge positiver und negativer Elektrizität. Die Ergiebigkeit der hierbei entstehenden Quellen des Kraftflusses ist mithin numerisch gleich der Ergiebigkeit der Senken, die elektrostatischen Kraftfelder reichen nicht ins Unendliche (§ 21). Darin weichen sie von den Gravitationsfeldern ab, die nur Quellen besitzen; diese Quellen sind freilich durch Massen gegeben, die nicht neu zu schaffen oder zu vernichten sind.

§ 35. Das elektrostatische Potential. Die metallischen Leiter.

Wir führen den Probekörper auf einem geschlossenen Wege herum, um das Linienintegral $\int_P^P \mathfrak{E}_s ds$ für einen solchen Weg zu berechnen. Würde dieses für irgendeinen geschlossenen Weg von Null verschieden sein, so könnte man durch Herum-

führen des Probekörpers fortgesetzt Arbeit aus dem elektrostatischen Felde ziehen. Die Erfahrung zeigt, daß dieses nicht der Fall ist; die Arbeit längs eines geschlossenen Weges ist stets gleich Null. Das elektrostatische Feld ist also wirbelfrei. Es ist curl $\mathfrak{E} = 0$. Nach § 18 kann man dem Felde mithin ein Potential φ zuordnen, dessen negativer Gradient der Vektor $\mathfrak{E}$ ist.

(127) $$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi.$$

Man bestimmt das Potential φ eines gegebenen elektrostatischen Feldes eindeutig durch die Festsetzung, daß es im Unendlichen verschwindet.

Wie man das Feld durch Zeichnung der Kraftlinien geometrisch darstellt, so kann man es auch durch Konstruktion der Flächen konstanten Potentiales darstellen. Diese Äquipotentialflächen werden senkrecht von den Kraftlinien geschnitten.

Wir wollen in diesem Kapitel von dem Felde elektrisch geladener Metallkörper reden. Die Erfahrung lehrt, daß die Oberfläche eines solchen Körpers eine Äquipotentialfläche ist, daß mithin die Kraftlinien auf seiner Oberfläche senkrecht beginnen oder endigen. Man kann dieses Verhalten in Verbindung bringen mit der im § 33 erwähnten Eigenschaft eines Metalldrahtes, Elektrizität von dem Pole einer Batterie einem Körper zuzuführen. Man nennt Körper, denen diese Eigenschaft zukommt, „Leiter der Elektrizität“, solche, denen sie fehlt, „Isolatoren“. Diese Körperklassen sind nicht immer strenge zu sondern. So gibt es Körper, z. B. der Nernstsche Glühkörper, die, bei gewöhnlicher Temperatur isolierend, bei Erwärmung Leiter werden. Bei Luft und anderen Gasen hängt es vom Luftdruck und von dem Betrage der Feldstärke ab, ob sie sich wie Leiter oder wie Isolatoren verhalten. Das steht aber fest, daß die Metalle unter allen Umständen Leiter der Elektrizität sind. Mit dieser Eigenschaft kann man nun ihr Verhalten im elektrostatischen Felde in Verbindung bringen; soll nämlich elektrisches Gleichgewicht be-

stehen, so muß eine Verschiebung der Elektrizität längs der Oberfläche des Leiters ausgeschlossen sein; es fehlt die auf eine derartige Verschiebung hinwirkende Kraft, wenn der Vektor $\mathfrak{E}$ senkrecht auf der Metalloberfläche steht.

Man wird auf Grund dieser Auffassung weiter verlangen müssen, daß im Inneren des Metalles, falls elektrisches Gleichgewicht besteht, der elektrische Vektor durchweg Null ist. Ob diese Forderung wirklich erfüllt ist, kann man nicht direkt prüfen, da man den Probekörper, der zur Untersuchung des Feldes dient, nicht in das Innere der Leitersubstanz bringen kann, ohne diese selbst zu entfernen. Man kann indessen einen Hohlraum herstellen, der rings von metallischen Wänden umschlossen ist. Sind innerhalb des Hohlraumes keine elektrischen Ladungen, so ist erfahrungsgemäß hier das Feld in der Tat Null, die metallische Umhüllung schirmt das Innere gegen das elektrostatische Feld außerhalb befindlicher Ladungen. Füllt man nun den Hohlraum mit der leitenden Materie, so wird ein elektrisches Feld nicht entstehen. In das Innere des Metalles dringt mithin das elektrostatische Feld nicht ein; das elektrostatische Potential ist hier konstant.

Anders liegt die Sache, wenn man in das Innere eines von Leitern eingeschlossenen Raumes elektrische Ladungen bringt. Hier muß, nach Gleichung (126), der gesamte Kraftfluß, durch eine den äußeren Leiter umschließende Fläche hindurch, proportional der im Inneren des Metalles und an seiner Oberfläche angesammelten Elektrizitätsmenge sein. War nun vor der Einführung der Elektrizität in ihr Inneres die metallische Wand unelektrisch, so muß sie jetzt elektrisch werden, da ja von ihr ein Kraftfluß ausgeht. Das wird sie in der Tat, und zwar erhält die Außenwand Ladung von dem Betrage und Vorzeichen der in den Hohlraum eingeführten Elektrizität, die Innenwand Ladung von gleichem Betrage und von entgegengesetztem Vorzeichen, so daß im ganzen von dem Systeme derjenige Kraftfluß ausgeht, welcher der hereingebrachten Ladung entspricht. Das Verhalten der Metalle ist auch hier

durchaus in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Elektrizität in ihrem Inneren frei beweglich ist, und daß im Falle des elektrischen Gleichgewichtes innerhalb des Metalles kein Feld besteht.

Betrachten wir nun das gesamte, den Raum erfüllende Feld, sowohl außerhalb wie innerhalb der Metalle, so ist dasselbe überall wirbelfrei. Es ist auch frei von räumlich verteilten Quellen, im Luftraume nach Gleichung (125), im Metalle, weil hier $\mathfrak{E} = 0$ ist. Wohl aber ist an der Oberfläche des Metalles eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}$ vorhanden (vgl. § 23), da von ihr ein Kraftfluß nach außen geht; dieser beträgt $\mathfrak{E}_\nu$, wenn ν die nach dem Luftraum weisende Normale ist.

Die „Flächendichte der Elektrizität" (ω), multipliziert mit 4π, ist nun gleich dem von der Flächeneinheit ausgehenden Kraftfluß; es ist nach (127)

$$4\pi\omega = \mathfrak{E}_\nu = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}. \tag{128}$$

Noch wäre es möglich, daß außer den flächenhaft verteilten Quellen des Kraftflusses Doppelquellen an der Grenzfläche von Luft gegen Metall ihren Sitz hätten. In der Tat, eine homogene Doppelschicht auf dieser geschlossenen Fläche würde nach § 23 weder innen noch außen das Feld ändern. Darin liegt eine Schwierigkeit, ihr Vorhandensein experimentell zu entscheiden. Wir wollen daher zunächst solche Doppelschichten nicht in Betracht ziehen. Wir kommen später auf die Frage nach der Existenz solcher Doppelschichten zurück.

Kennt man das wirbelfreie Feld des Vektors $\mathfrak{E}$, so kann man die Verteilung der Elektrizität nach (128) berechnen. Ist anderseits die Verteilung der Elektrizität auf den Oberflächen der Leiter bekannt, so kann man das Feld nach den Vorschriften des § 23 berechnen. Es ist das Potential nach Gleichung (87)

$$\varphi = \int df \cdot \frac{\omega}{r}; \tag{129}$$

als sein negativer Gradient ergibt sich nach Gleichung (127) die elektrische Feldstärke. Weder die eine, noch die andere Problemstellung liegt indessen in Wirklichkeit vor. Das Grundproblem der Elektrostatik ist vielmehr das folgende: Gegeben sind die Ladungen e_i der Leiter; es ist ein wirbelfreies Feld $\mathfrak{E}$ im Luftraum so zu bestimmen, daß die Kraftlinien senkrecht auf den Oberflächen der Leiter beginnen oder endigen, oder anders ausgedrückt, daß das Potential für jeden Leiter konstant ist. Das so bestimmte Feld ist das elektrostatische, die entsprechende Elektrizitätsverteilung tritt, im Falle des Gleichgewichtes, wirklich ein.

§ 36. Die Kapazität des Kugelkondensators und des gestreckten Rotationsellipsoides.

Das elektrostatische Problem ist nur in wenigen Fällen lösbar. Der einfachste Fall ist eine geladene metallische Kugel. Es sei e die Ladung derselben, a ihr Radius; aus Symmetriegründen liegt es nahe, eine gleichförmige Verteilung der Ladung anzunehmen, so daß

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2}$$

die Flächendichte der Elektrizität ist. Man erfüllt die Gleichungen (126) und (128), welche den Zusammenhang von Elektrizität und Kraftfluß, die erstere in Form einer Integralgleichung, die letztere in Form einer Differentialgleichung, ausdrücken, indem man den Kraftfluß $4\pi e$ durch alle zur Oberfläche des Leiters konzentrischen Kugeln treten läßt und demgemäß die radiale Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{e}{r^2}$$

setzt. Das Potential dieses wirbelfreien Feldes ist

$$\varphi = \frac{e}{r};$$

es hat auf der Kugel den konstanten Wert

$$\varphi_a = \frac{e}{a}.$$

Wir müssen nun, um ein in der Natur mögliches elektrostatisches Feld zu erhalten, angeben, wo die Kraftlinien, die von der Kugel ausgehen, endigen. Wir wollen festsetzen, daß eine zweite konzentrische Metallkugel vom inneren Radius b die erste einschließt, und daß auf dieser die Kraftlinien endigen; die Ladung ist hier $-e$, die Flächendichte beträgt

$$\varpi = -\frac{e}{4\pi b^2},$$

das Potential

$$\varphi_b = \frac{e}{b}.$$

Diese Anordnung bezeichnet man als Kugelkondensator, und nennt „Kapazität" des Kondensators den Quotienten aus der positiven Ladung e, und der Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_b$ des positiv geladenen und des negativ geladenen Leiters. Es ist

$$\varphi_a - \varphi_b = e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = e \cdot \frac{b-a}{a \cdot b},$$

mithin die Kapazität

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{a \cdot b}{b-a}. \tag{130}$$

Durch Verkleinerung des Abstandes $(b - a)$ der beiden Kugeln kann man sehr große Kapazitäten erzielen.

Wenn man von der Kapazität einer einzelnen Kugel schlechtweg redet, so nimmt man an, daß die andere Kugel, welche die entgegengesetzte Ladung trägt, sich in sehr großer Entfernung befindet; die Kapazität der Kugel ist in diesem Falle gleich ihrem Radius a. Da das elektrische Feld niemals ins Unendliche reicht, so muß man immer die Enden der Kraftlinien berücksichtigen. Bei Laboratoriumsversuchen endigen die Kraftlinien an den Wänden des Zimmers oder auf der Oberfläche etwa im Zimmer anwesender Leiter. Befinden sich die Endpunkte der Kraftlinien in Entfernungen, die groß sind gegen den Radius der Kugel, so ist die Kapazität der Kugel praktisch gleich ihrem Radius.

Wir wollen jetzt die Kapazität eines gestreckten Rotationsellipsoides berechnen. Die Enden der auf dem

Ellipsoide beginnenden Kraftlinien werden, wenn von der Kapazität des Ellipsoides schlechtweg die Rede ist, in sehr große Entfernung verlegt, etwa auf eine zum Ellipsoide konzentrische Kugelfläche. Die Aufgabe ist nun mathematisch folgendermaßen zu formulieren: Innerhalb des von den beiden Leitern begrenzten Raumes hat das Potential φ der aus (125) und (127) folgenden Gleichung

$$\Delta^2\varphi = 0 \tag{131}$$

zu genügen; auf den Oberflächen f_1, f_2 der Leiter nimmt es konstante Werte

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2 \tag{131a}$$

an; der Gradient von φ weist senkrecht zu diesen Flächen und ist nach (128) der Flächendichte ω proportional

$$4\pi\omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}.$$

Dabei ist ω noch bis zu einem gewissen Grade willkürlich, es ist nur die Gesamtladung

$$e = \int df_1\,\omega = -\frac{1}{4\pi}\int df_1\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = +\frac{1}{4\pi}\int df_2\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \tag{131b}$$

vorgeschrieben.

Es kommt meist nicht so sehr auf die Ermittelung der Elektrizitätsverteilung, als eben auf den Wert der Kapazität an; dieser ist bestimmt, wenn die Potentiale φ_1, φ_2 der beiden Leiter gefunden sind; es wird dann

$$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}. \tag{131c}$$

Da es allgemeine Methoden zur Lösung des soeben formulierten Problems der Elektrostatik für beliebige Leiterformen nicht gibt, so wollen wir die Kapazität des gestreckten Rotationsellipsoides auf einem eigentümlichen, nur für diese spezielle Leiterform gangbaren Wege lösen. Wir denken uns in unserer hydrodynamischen Analogie die Verbindungslinie der Brennpunkte gleichförmig mit Quellen besetzt. Wir zeigen,

daß die Äquipotentialflächen des zugehörigen wirbelfreien Feldes konfokale Rotationsellipsoide sind, und daß das Feld auch die übrigen verlangten Eigenschaften besitzt.

Die Ergiebigkeit der ganzen Strecke, von der Länge $2c$, setzen wir gleich e. Dann wird das Potential

$$\varphi = \frac{e}{2c} \cdot \int_{-c}^{+c} \frac{d\xi}{r},$$

wenn r den Abstand eines Aufpunktes von den Punkten der mit Quellen belegten Linie angibt. Die z-Achse in die Quellenlinie, den Koordinatenanfang in ihren Mittelpunkt legend, setzen wir

$$r = \sqrt{(z-\xi)^2 + x^2 + y^2}$$

und erhalten

$$(132)\quad \varphi = -\frac{e}{2c} \cdot \Big\{ ln(z - \xi + r) \Big\}_{\xi=-c}^{\xi=+c} = \frac{e}{2c} \cdot ln\left(\frac{z+c+r_1}{z-c+r_2}\right),$$

wenn r_1, r_2 die Entfernungen des Aufpunktes von den durch

$$\xi = -c, \quad \xi = +c$$

gekennzeichneten Endpunkten der belegten Linie sind.

Um nun zu zeigen, daß φ auf konfokalen Rotationsellipsoiden konstant ist, gehen wir aus von der Gleichung dieser Flächenschar in der Parameterdarstellung

$$z = c \cdot \alpha \cdot \cos\beta, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = c\sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot \sin\beta, \quad \begin{matrix} 1 \leqq \alpha < \infty, \\ 0 \leqq \beta \leqq \pi. \end{matrix}$$

Die Flächen $\alpha =$ constans sind gestreckte Rotationsellipsoide von den Halbachsen

$$a = c\alpha, \quad b = c\sqrt{\alpha^2 - 1};$$

für $\alpha = 1$ erhält man die belegte Linie als Grenzfall eines sehr gestreckten Rotationsellipsoides. Die Flächen $\alpha =$ constans werden senkrecht geschnitten von den Flächen $\beta =$ constans; dieses sind nämlich konfokale Rotationshyperboloide von den reellen Halbachsen $c \cdot \cos\beta$. Die Brennpunkte beider Flächen

scharen sind die Endpunkte der belegten Linie. Mithin folgt aus bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte:

$$r_1 + r_2 = 2c\alpha, \qquad r_1 - r_2 = 2c\cos\beta,$$
$$r_1 = c\alpha + c\cos\beta, \qquad r_2 = c\alpha - c\cos\beta.$$

Setzt man die für z, r_1, r_2 erhaltenen Werte in (132) ein, so erhält man

$$(132a) \qquad \varphi = \frac{e}{2c} \cdot ln\left(\frac{\alpha\cos\beta + 1 + \alpha + \cos\beta}{\alpha\cos\beta - 1 + \alpha - \cos\beta}\right) = \frac{e}{2c} \cdot ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right).$$

Das Potential ist also in der Tat konstant auf den konfokalen Rotationsellipsoiden $\alpha =$ constans; es verschwindet auf einer in sehr großer Entfernung befindlichen Kugel. Denken wir uns irgendeines der gestreckten Ellipsoide der Schar als leitend, so genügt das Feld in dem von dieser Fläche einerseits, von der sehr entfernten Kugel anderseits begrenzten Raume allen Bedingungen des elektrischen Problemes. Das Feld ist hier wirbelfrei und quellenfrei, der gesamte, aus dem Ellipsoide heraustretende Kraftfluß ist gleich der Ergiebigkeit e der belegten Linie, endlich sind die beiden das Feld begrenzenden Leiteroberflächen Äquipotentialflächen. Es sind demnach die Bedingungen (131, 131a, 131b) erfüllt. Vorausgesetzt, daß diese Bedingungen überhaupt das elektrostatische Feld eindeutig bestimmen — auf diese Frage kommen wir weiter unten zurück — ist φ das Potential des gesuchten Feldes. Die Kraftlinien verlaufen in Meridianebenen; es sind konfokale Hyperbeln.

Sind a, b, c jetzt große und kleine Halbachse und halber Brennpunktsabstand des leitenden Ellipsoides, so ist, um dessen Potential φ_1 zu erhalten, in (132a)

$$\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

zu setzen. Es wird

$$(132b) \qquad \varphi_1 = \frac{e}{2c} \cdot ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right);$$

da außerdem auf der sehr entfernten Kugel (für $\alpha = \infty$)

$$\varphi_2 = 0$$

ist, so wird die Kapazität K des gestreckten Rotationsellipsoides bestimmt durch

$$\frac{1}{K} = \frac{\varphi_1}{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right). \tag{132c}$$

Für sehr gestreckte Ellipsoide, d. h. für sehr kleine Werte des Quotienten $b : a$, erhält man

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{a} \cdot ln\left(\frac{2a}{b}\right). \tag{132d}$$

Die Kapazität eines solchen stabförmigen Leiters, der etwa durch einen Draht mit kreisförmigem nach den Enden hin abnehmendem Querschnitt zu realisieren ist, ergibt sich um so kleiner, je geringer bei gegebener Länge seine Dicke ist. Die Elektrizitätsverteilung wird übrigens in diesem Grenzfalle durch die oben zur Ableitung des Potentiales benutzte homogene Belegung der die Brennpunkte verbindenden Strecken dargestellt. Die Elektrizität verteilt sich demnach über den stabförmigen Leiter so, daß auf gleiche Längen des Drahtes gleiche Ladungen entfallen.

§ 37. Ein elektrischer Punkt gegenüber einer leitenden Ebene.

Wir denken uns das Feld auf der einen Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, welche die Oberfläche eines Leiters bildet. Im Abstande a von dieser Ebene, in einem Punkte A, denken wir uns einen kleinen, mit der Elektrizitätsmenge e geladenen Körper befindlich. Die Abmessungen des Körpers sollen so klein sein, daß sein elektrisches Feld bei Abwesenheit der leitenden Ebene aus dem Potentiale

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

abzuleiten wäre. Es fragt sich nun, wie die leitende Begrenzungsebene das Feld modifiziert. Das Potential

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

genügt offenbar keineswegs der Bedingung, auf dieser Ebene konstant zu sein. Man kann indessen ein Feld erhalten, für welches jene Ebene Äquipotentialfläche ist, indem man dem Punkte A den spiegelbildlich ihm entsprechenden B zuordnet und sich in diesem Bildpunkte die entgegengesetzte Ladung $-e$ befindlich denkt. Ist r' der Abstand eines Aufpunktes vom Bildpunkte, so stellt

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \tag{133}$$

das Potential des resultierenden Feldes in dem betrachteten Halbraume dar. Dasselbe ist konstant auf der Begrenzungsebene, da hier $r = r'$ ist. Das Feld ist auf derjenigen Seite der Ebene, in welcher der Punkt A liegt, quellenfrei und wirbelfrei, mit Ausnahme des Punktes A selbst; von diesem geht der Kraftfluß $4\pi e$ aus.

Auf der Begrenzungsebene beträgt die senkrecht weisende elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_\nu = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -e\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} + e\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \nu} = -\frac{2ae}{r^3};$$

die ihr nach (128) proportionale Flächendichte ist

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_\nu = -\frac{e}{2\pi}\cdot\frac{a}{r^3}. \tag{133a}$$

Die Elektrizität verteilt sich mithin in der Weise auf der ebenen Oberfläche des Leiters, daß die Flächendichte der dritten Potenz des Abstandes vom elektrischen Punkte umgekehrt proportional ist. Als gesamte Ladung der Ebene

$$\int \omega df = -\frac{e}{2\pi}\int \frac{a\cdot df}{r^3}$$

wird durch Einführung von Polarkoordinaten ϱ, ϑ erhalten

$$\int \omega df = -\frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_0^{\infty} \frac{a \cdot \varrho\, d\varrho}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = +e \cdot \left\{ \frac{a}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}_{\varrho=0}^{\infty} = -e.$$

Es endigen mithin alle im Punkte A beginnenden Kraftlinien auf der ebenen Oberfläche des Leiters.

Die Erscheinung, daß ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten, ursprünglich ungeladenen Leiters, Ladung entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, bezeichnet man als „elektrische Influenz“. Diese Erscheinung ist aufzufassen als Folge des Umstandes, daß in das Innere des Leiters das Feld nicht eindringen kann. Ist der Leiter von endlicher Ausdehnung und ohne Verbindung mit anderen Körpern, so muß seine Ladung im ganzen gleich Null bleiben, daher werden ebensoviel Kraftlinien, wie auf der dem influenzierenden Punkte gegenüberliegenden Seite endigen, auf der anderen Seite beginnen. In dem oben behandelten Falle eines unendlich ausgedehnten, das Feld nach der einen Seite hin abschließenden Leiters indessen ist die Ladung $+e$, die gleichzeitig mit der influenzierten Ladung $-e$ bei Annäherung des influenzierenden Punktes entstand, fortgeschafft zu denken.

Die Lösung des Influenzproblemes mit Hilfe elektrischer Bilder ist von W. Thomson auf kugelförmige Leiter ausgedehnt worden.

Wird in die Nähe eines geladenen Leiters ein elektrischer Punkt gebracht, etwa als Probekörper zur Untersuchung des Feldes, so superponiert sich sein durch Anwesenheit des Leiters modifiziertes Feld dem ursprünglichen Felde des Leiters. Daher wird die Kraft, die der Probekörper erfährt, nicht der ursprünglichen, sondern der durch seine Anwesenheit modifizierten Elektrizitätsverteilung über den Leiter hin entsprechen, die Kraft wird hier ein genaues Maß für die ursprünglich herrschende Feldstärke nicht ergeben, um so weniger, je größer die Ladung des Probekörpers ist und je mehr er sich

der Oberfläche des Leiters nähert. In unmittelbarer Nähe der Leiteroberfläche ist die im § 33 gegebene Definition des Vektors $\mathfrak{E}$ durch den Probekörper nur dann richtig, wenn man die Ladung desselben beliebig klein machen kann. Streng genommen, definiert erst der bei fortgesetzter Verkleinerung der Ladung e des Probekörpers erreichte Grenzwert

$$\lim_{e=0}\left(\frac{\mathfrak{K}}{e}\right)$$

den Vektor $\mathfrak{E}$.

Zweites Kapitel.

Dielektrika.

§ 38. Dielektrizitätskonstante und elektrische Verschiebung.

Wir haben uns bisher auf das elektrische Feld im Luftraume beschränkt. Wir gehen jetzt dazu über, andere Isolatoren in Betracht zu ziehen. Faraday hat gefunden, daß die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 36) sich ändert, wenn der Raum zwischen den Kugeln mit anderen isolierenden Substanzen, etwa Wachs oder Schwefel, ausgefüllt wird; die Ladung der Kugeln bei konstant gehaltener Potentialdifferenz wächst dann in einem bestimmten, nur von der betreffenden isolierenden Substanz abhängigen Verhältnis, die Kapazität des Kondensators wird jetzt nicht mehr durch die Formel (130), sondern durch die allgemeinere Formel

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \varepsilon \cdot \frac{ab}{b-a} \tag{134}$$

gegeben. Die Konstante ε, welche das dielektrische Verhalten eines Isolators anzeigt, wird die „Dielektrizitätskonstante" genannt. Sie ist definiert als Quotient aus der Kapazität eines mit dem betreffenden homogenen Dielektrikum gefüllten Kugelkondensators und der Kapazität eines geometrisch gleichen Luftkondensators. Es ist z. B. die Dielektrizitätskonstante von Paraffin 2,3, von Gläsern 6 bis 8, von destilliertem Wasser 76.

Die Dielektrizitätskonstante der Gase, insbesondere der atmosphärischen Luft, hängt wesentlich von der Dichte ab und zwar in der Weise, daß für alle Gase die Werte von ε mit abnehmender Dichte sich einem und demselben Grenzwerte nähern. Diesen Grenzwert bezeichnet man als Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes oder des „Äthers". Die Tatsache, daß bei starker Verdünnung der in einem Raume enthaltenen Materie die Gesetze des elektrischen Feldes von der chemischen Natur der Materie unabhängig werden, ist für die Entwickelung der Elektrizitätslehre überaus wichtig geworden. Sie legt die Annahme nahe, daß auch der leere Raum elektrische Wirkungen vermittelt, daß er der Sitz eines elektrischen Feldes sein kann. Da man früher dem Raum nur geometrische Eigenschaften beizulegen pflegte, so hat man für den mit elektromagnetischen Eigenschaften behafteten Raum ein besonderes Wort „Äther" eingeführt. Es ist gut, sich zu vergegenwärtigen, daß sowohl der Begriff des geometrischen Raumes, wie auch der Begriff des elektromagnetischen Äthers nur Abstraktionen sind. Die Eigenschaften des Raumes, welche die Geometrie behandelt, und diejenigen, welche uns durch das Studium der elektromagnetischen Vorgänge bekannt geworden sind, sind zwar rein begrifflich zu scheiden, in Wirklichkeit aber sind sie unzertrennlich; geometrische und elektromagnetische Eigenschaften zusammen charakterisieren erst den wirklichen Raum. Wir verbinden heute mit dem Worte „Äther" keineswegs die Vorstellung einer hypothetischen Substanz; vielmehr gebrauchen wir dieses historisch überlieferte Wort heute als Abkürzung, wenn wir ohne Weitschweifigkeiten von dem Raume als Träger eines elektromagnetischen Feldes sprechen.

Wir haben uns bisher der Luft bei Atmosphärendruck als Normalsubstanz bedient und auf diese die Dielektrizitätskonstanten der Körper bezogen. Bei theoretischen Untersuchungen wird man besser die Dielektrizitätskonstanten der Körper auf den Äther beziehen; die Zahlenwerte von ε werden dann alle größer als 1, insbesondere wird für Luft unter

Atmosphärendruck $\varepsilon = 1{,}000590$. Praktisch ist demnach der Unterschied der dielektrischen Konstanten von Luft bei Atmosphärendruck und bei großer Verdünnung meist zu vernachlässigen. Immerhin wollen wir von jetzt an die Festsetzung treffen, daß die Entwickelungen des vorigen Kapitels sich streng genommen auf den Luftraum bei unendlicher Verdünnung der Luft, d. h. auf den Äther beziehen. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Grundgesetze der Elektrostatik so zu verallgemeinern, daß sie beliebige isotrope Dielektrika umfassen.

Für ein homogenes, flüssiges oder gasförmiges Dielektrikum bleibt die Definition des Vektors $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des geladenen Probekörpers (Gleichung 124) bestehen; auch hier ergibt die Erfahrung, daß das Feld von $\mathfrak{E}$ überall wirbelfrei ist; dasselbe leitet sich also ab aus einem Potential φ. Um nun die nach Gleichung (134) geänderte Kapazität eines Luftkondensators zu erklären, muß man die durch (126) formulierte Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der elektrischen Ladung e aufgeben.

Wir führen mit Maxwell einen neuen Vektor $\mathfrak{D}$ ein, welcher den Vektor $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$ in jener Relation (126) ersetzt und welcher „elektrische Verschiebung“ genannt wird. Er soll folgender Festsetzung genügen

$$\int df \mathfrak{D}_\nu = \sum_{i=1}^{n} e_i. \tag{135}$$

D. h. das über eine geschlossene Fläche f erstreckte Integral der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{D}$, oder die gesamte dielektrische Verschiebung durch die Fläche ist gleich der gesamten, von der Fläche umschlossenen elektrischen Ladung. Maxwells Bezeichnung „elektrische Verschiebung“ legt eine von der hydrodynamischen Abbildung etwas abweichende mechanische Analogie zugrunde, indem sie das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ nicht durch die in der Zeiteinheit stattfindende Bewegung eines

Fluidums abbildet, sondern durch die gesamte Verschiebung, welche die Teilchen eines solchen Fluidums von der Gleichgewichtslage aus erfahren haben. Vom Standpunkte der Geometrie der Vektorfelder aus sind indessen die beiden Bilder nicht wesentlich voneinander verschieden. Die Elektrizität ist je nach dem Vorzeichen, Quelle oder Senke der elektrischen Verschiebung. In dem von Elektrizität freien Punkte des Isolators ist das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ quellenfrei; es gilt hier allgemein

$$\text{div}\,\mathfrak{D} = 0. \tag{135a}$$

Von der Einheit der Elektrizität wollen wir jetzt je eine Verschiebungslinie ausgehen lassen, so daß die Zahl der Verschiebungslinien, welche ein zum Vektor $\mathfrak{D}$ senkrecht gestelltes Flächenelement df durchsetzen, gleich $|\mathfrak{D}| \cdot df$ wird. Diejenigen Verschiebungslinien, die nicht geschlossen sind, beginnen bei der positiven, sie endigen bei der negativen Elektrizität.

Da nun für den Kugelkondensator von gegebener Ladung nach diesen Festsetzungen die gesamte Verschiebung durch konzentrische Kugeln dieselbe ist wie früher, und da der Zusammenhang von $\mathfrak{E}$ und φ der alte geblieben ist, so ist, um die durch (134) ausgedrückte Änderung der Kapazität zu erhalten, der Vektor $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{E}$ folgendermaßen zu verknüpfen

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}. \tag{136}$$

In der Tat wird bei dieser Festsetzung der Quotient von Ladung zur Potentialdifferenz der Kugeln im Verhältnis $\varepsilon : 1$ vergrößert, wenn der vorher leere Raum des Kugelkondensators mit dem betreffenden Isolator gefüllt wird. Überhaupt kann man das elektrostatische Problem für den Fall, daß das Feld von einem homogenen Isolator gefüllt ist, allgemein zurückführen auf den Fall, wo die geladenen Leiter sich im leeren Raume befinden. Werden die Ladungen der Leiter konstant gehalten, so wird das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ durch Erfüllung des Raumes mit dem Dielektrikum nicht geändert, aber $\mathfrak{E}$ und φ werden im Verhältnis

$\frac{1}{\varepsilon}$ verkleinert. Werden aber die Potentiale der Leiter konstant gehalten, so bleibt das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ ungeändert, mithin wird $\mathfrak{D}$ und die elektrische Ladung im Verhältnis ε vergrößert. Es folgt z. B., daß die Kapazität eines einzelnen Leiters im Verhältnis ε vermehrt wird, wenn der Leiter aus dem leeren Raume in ein Dielektrikum gebracht wird, freilich streng genommen nur dann, wenn dasselbe den ganzen Raum außerhalb des Leiters erfüllt. Wenn die Dielektrika nicht homogen sind, oder wenn Trennungsflächen zweier Isolatoren im Felde verlaufen, sind besondere Betrachtungen notwendig.

Für ein festes Dielektrikum ist es nicht ohne weiteres möglich, den Vektor $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des Probekörpers zu bestimmen und so die wirbelfreie Verteilung des Feldes festzustellen. Hier sind die soeben aufgestellten Gesetze des Feldes zunächst rein hypothetisch einzuführen; die Rechtfertigung ist zu sehen in der Richtigkeit der weiterhin zu entwickelnden Folgerungen, die sich auf das Feld außerhalb der festen Dielektrika oder auf die Kapazität der Leiter beziehen.

§ 39. Wahre und freie Elektrizität. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien.

In einem elektrostatischen Felde, welches von dielektrischen Körpern erfüllt ist, haben wir jetzt zwei Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ zu unterscheiden, die durch (136) verknüpft sind. Die Quellen der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ sind nach (135) die Ladungen wahrer Elektrizität. Wenden wir diese allgemeine Beziehung auf Raumelemente bzw. Flächenelemente von Trennungsflächen an, so erhalten wir

$$\text{(137)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho, \quad -(\mathfrak{D}_{\nu 1} + \mathfrak{D}_{\nu 2}) = \varpi.$$

Die räumliche Dichte der wahren Elektrizität ist gleich der Divergenz, ihre Flächendichte gleich der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$.

Neben der „wahren Elektrizität“ führen wir jetzt die „freie Elektrizität“ durch folgende Festsetzungen ein:

Die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität und die Flächendichte ω' derselben sollen gleich der räumlichen Divergenz bzw. der Flächendivergenz des Vektors $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$ sein

$$\text{(137a)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho', \quad -(\mathfrak{E}_{\nu_1} + \mathfrak{E}_{\nu_2}) = 4\pi\omega'.$$

Die auf einem isolierten Leiter befindliche Menge wahrer Elektrizität wird durch Einführung in einen anderen Isolator nicht geändert. Der Kraftfluß aber, und daher die Menge der freien Elektrizität auf dem Leiter, wird dadurch geändert.

Wir betrachten das Feld, das eine Anzahl geladener Leiter umgibt. Die Flächendichte der wahren Elektrizität, die an der Oberfläche der Leiter ihren Sitz hat, ist, wenn ν die äußere Normale dieser Flächen bezeichnet,

$$\text{(137b)} \qquad \omega = \mathfrak{D}_\nu.$$

Wir nehmen an, daß weder im Innern der im Felde befindlichen Dielektrika, noch an der Trennungsfläche je zweier derselben wahre Elektrizität sich befindet, dann gilt

$$\text{(137c)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{D}_{\nu_1} + \mathfrak{D}_{\nu_2} = 0.$$

Die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ durchsetzt demnach stetig die Trennungsfläche zweier Dielektrika.

Die räumliche Dichte ϱ' ist nach (136) und (137c) im Innern homogener Isolatoren ebenfalls gleich Null, sie ist aber von Null verschieden, wenn der Isolator inhomogen, d. h. wenn ε in demselben nicht konstant ist. Insbesondere in einer Übergangsschicht zweier Dielektrika ist freie Elektrizität anzunehmen; im Grenzfalle unstetigen Überganges bildet sie eine Flächenbelegung von der durch (137a) bestimmten Flächendichte ω'.

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist im elektrostatischen Felde überall wirbelfrei verteilt und daher als Gradient eines Potentiales darzustellen

$$\text{(138)} \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi, \quad \operatorname{curl}\mathfrak{E} = 0.$$

An der Trennungsfläche verschiedener Substanzen treten keine Flächenwirbel (§ 27) des Vektors $\mathfrak{E}$ auf, d. h. die

tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche zweier Körper.

Im Innern homogener Isolatoren ist nach (136) und (138) auch der Wirbel des Vektors $\mathfrak{D}$ Null, aber im Innern inhomogener Isolatoren, sowie insbesondere auf der Trennungsfläche verschiedener Isolatoren können Wirbel von $\mathfrak{D}$ ihren Sitz haben; es können daher sehr wohl geschlossene Verschiebungslinien auftreten.

Will man das Potential φ berechnen, so muß man natürlich die Quellen des wirbelfreien Vektorfeldes

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi$$

in Betracht ziehen, d. h. die freie Elektrizität.

Es ist

$$\varphi = \int \frac{dv\,\varrho'}{r} + \int \frac{df\,\omega'}{r}, \tag{138a}$$

wo ϱ', die räumliche Dichte der freien Elektrizität, in denjenigen Volumelementen von Null verschieden ist, wo ε mit dem Orte variiert und ω', die Flächendichte der freien Elektrizität, nicht nur an der Oberfläche der Leiter, sondern auch an der Trennungsfläche je zweier Isolatoren ihren Sitz hat.

Aus der Stetigkeit der normalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ und der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ folgt das Brechungsgesetz der Kraftlinien an der Grenze zweier Isolatoren. Die Kraftlinien, die vom Dielektrikum (1) nach (2) gehen mögen, zeigen die Richtung beider Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ an. Es seien α_1, α_2 die Winkel, welche die Richtungen der beiden Vektoren zu beiden Seiten der Trennungsfläche mit der von (1) nach (2) gehenden Normalen einschließen. Dann ist

$$|\mathfrak{D}_1| \cos\alpha_1 = |\mathfrak{D}_2| \cos\alpha_2, \quad |\mathfrak{E}_1| \cdot \sin\alpha_1 = |\mathfrak{E}_2| \cdot \sin\alpha_2,$$

daher, mit Rücksicht auf (136)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2. \tag{139}$$

Die trigonometrischen Tangenten der Kraftlinienrichtungen gegen die Normale der Trennungs-

fläche verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten der beiden aneinander grenzenden Isolatoren. Die Kraftlinien werden also beim Eintritt in einen Isolator mit größerer Dielektrizitätskonstante von der Normale fortgebrochen.

Treffen die Kraftlinien senkrecht auf die Trennungsfläche zweier Isolatoren, so ändert sich ihre Richtung nicht; es entsteht aber eine Flächenbelegung freier Elektrizität. Als Beispiel mag wieder der Kugelkondensator (§ 36) dienen. An die innere Kugel vom Radius a mag sich zunächst eine dielektrische Kugelschicht von der Dielektrizitätskonstante ε_1 anschließen, die nach außen durch eine konzentrische Kugel vom Radius c begrenzt wird; der Raum zwischen dieser Kugel und der leitenden Kugel vom Radius b sei von einem zweiten Isolator von der dielektrischen Konstante ε_2 erfüllt.

Wahre Elektrizität sitzt nur auf der Oberfläche der beiden Metallkugeln, und zwar positive $+e$ auf der inneren, negative $-e$ auf der äußeren. Die gesamte dielektrische Verschiebung durch die konzentrischen Kugeln

$$\int \mathfrak{D}_r df$$

ist gleich e. Die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind radial gerichtet, es ist im ersten Isolator

$$\mathfrak{D}_r = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{e}{r^2},$$

im zweiten Isolator

$$\mathfrak{D}_r = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad \mathfrak{E}_r = \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{e}{r^2}.$$

Die Grenzbedingungen, welche stetigen Übergang der Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ und der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ verlangen, sind hierdurch erfüllt.

Es ist die Flächendichte der wahren Elektrizität an der inneren Metallkugel

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2},$$

an der äußeren Metallkugel

$$\omega = -\frac{e}{4\pi b^2}.$$

Hingegen die Flächendichte der freien Elektrizität an der inneren Metallkugel ist

$$\omega' = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{e}{4\pi a^2},$$

an der Trennungsfläche der beiden Isolatoren

$$\omega' = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \cdot \frac{e}{4\pi c^2},$$

an der äußeren Metallkugel

$$\omega' = -\frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{e}{4\pi b^2}.$$

Die Gesamtmengen freier Elektrizität sind auf der inneren Metallkugel

$$e' = \omega' \cdot 4\pi a^2 = \frac{e}{\varepsilon_1},$$

auf der Trennungsfläche der beiden Isolatoren

$$e' = \omega' \cdot 4\pi c^2 = e\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$

auf der äußeren Metallkugel

$$e' = \omega' \cdot 4\pi b^2 = -\frac{e}{\varepsilon_2}.$$

Die algebraische Summe der freien Elektrizitäten, die auf den beiden Metallkugeln und auf der Trennungsfläche der beiden Isolatoren sich befinden, ist gleich Null.

Die Potentialdifferenz der beiden leitenden Kugeln ist

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^c \mathfrak{E}_r\, dr + \int_c^b \mathfrak{E}_r\, dr = \frac{e}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{e}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

Daher ist die Kapazität K des Systemes bestimmt durch

$$\frac{1}{K} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{e} = \frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 b} + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{140}$$

Sind die Radien b, c groß gegen a, so kann man $K = \varepsilon_1 a$ setzen, d. h. die Kapazität eines Systemes ist dann gleich der Kapazität einer Kugel, die sich allein in einem ganz von dem ersten Isolator erfüllten Raume befindet. Die erhaltene Gleichung lehrt, wie groß die Dicke der dielektrischen, der Kugel anliegenden Schicht sein muß, damit praktisch das zweite Dielektrikum die Kapazität nicht mehr beeinflußt.

§ 40. Ein elektrischer Punkt gegenüber einem dielektrischen Halbraume.

Wir denken uns einen elektrischen Punkt A im Luftraume befindlich, im Abstande a von der ebenen Oberfläche eines Dielektrikums; welchen Einfluß übt die Anwesenheit des Dielektrikums aus? Die Aufgabe entspricht der im § 37 für die leitende Ebene gelösten. Damals jedoch brauchten wir nur das Feld im Luftraume in Betracht zu ziehen, da jenseits der leitenden Ebene überhaupt kein Feld besteht. Jetzt wird auch das Feld innerhalb des Isolators zu berücksichtigen sein; wir wollen annehmen, daß der Isolator den ganzen Halbraum einnimmt. Seine Dielektrizitätskonstante sei ε_2, ε_1 diejenige der Luft.

Wir versuchen wieder die Lösung nach der Methode der elektrischen Bilder zu erhalten. Wir denken uns wieder den Punkt B jenseits der ebenen Begrenzung des Halbraumes, der A spiegelbildlich entspricht, und nennen r, r' die Abstände eines Aufpunktes von A bzw. seinem Bilde B.

Wir setzen für das Potential im Luftraume

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} - \frac{e'}{\varepsilon_1 r'}.$$

Es soll also das Feld im Luftraume der wahren Ladung e in A und der fingierten wahren Ladung e' in B entsprechen. Dieser Ansatz genügt der Grundbedingung, daß Quellen elektrischer Verschiebung innerhalb des Luftraumes nur in A vorhanden sind; denn der Bildpunkt B liegt ja außerhalb des Luftraumes. Was nun das Feld innerhalb des Dielektrikums

anbelangt, so wollen wir versuchen, es durch den Ansatz für das Potential im Dielektrikum

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}$$

darzustellen. Es soll also das Feld in dem Isolator so beschaffen sein, als ob der Isolator unendlich ausgedehnt und in A die wahre Ladung e'' befindlich wäre. Dieser Ansatz entspricht der Bedingung, daß innerhalb des wirklich von dem Dielektrikum erfüllten Halbraumes Quellen oder Senken elektrischer Verschiebung nicht vorkommen.

Man zeigt, daß das Feld wirklich durch diese Ansätze dargestellt wird, indem man nachweist, daß die Grenzbedingungen an der Begrenzungsebene des Dielektrikums durch geeignete Verfügung über die bisher unbestimmten Größen e', e'' zu erfüllen sind. Was zunächst die Normalkomponenten von $\mathfrak{D}$ anbelangt, so ist

$$\mathfrak{D}_{\nu 1} = + \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{a}{r^3} + \frac{e'}{4\pi} \cdot \frac{a}{r'^3}, \qquad \mathfrak{D}_{\nu 2} = - \frac{e''}{4\pi} \cdot \frac{a}{r^3},$$

wobei die Normalen ν_1, ν_2 von dem betreffenden Medium nach der Grenzfläche hinweisend angenommen sind. Die Grenzbedingung (137 c) verlangt nun das Verschwinden der Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$; da $r = r'$, so ist die Forderung dieser ersten Grenzbedingung

$$o = e + e' - e''.$$

Anderseits sollen die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ zu beiden Seiten der Trennungsebene die gleichen Werte besitzen; das wird jedenfalls dann der Fall sein, wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ längs der Ebene erfüllt ist, denn $\mathfrak{E}$ ist ja der Gradient von φ. Die Bedingung $\varphi_1 = \varphi_2$ ist nicht nur hinreichend, sie ist auch notwendig, wenn Doppelschichten freier Elektrizität an der Oberfläche des Isolators angeschlossen werden. Wir verlangen also zweitens

$$\frac{e - e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}.$$

Man erhält aus den beiden in e, e', e'' linearen Gleichungen

$$(141)\qquad \begin{cases} \dfrac{e-e'}{e+e'} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \qquad e' = e \cdot \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}, \\ e'' = e + e' = e \cdot \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \end{cases}$$

Hierdurch sind die fingierten „wahren" Ladungen $(-e')$ in B, $(+e'')$ in A bestimmt. Die Kraftlinien innerhalb des Dielektrikums verlaufen so, daß sie radial von A auszugehen scheinen, während im Luftraume das Feld durch Superposition zweier von dem Quellpunkte A und dem Senkpunkte B herrührender Felder sich darstellen läßt.

Ersetzt man das Dielektrikum durch einen Leiter, so hat man nach § 37, um das Potential im Luftraume zu bestimmen, dem Bildpunkte B die Ladung $(-e)$ zu geben. Es ist also die störende Wirkung des Dielektrikums auf die Feldstärke im Luftraume, verglichen mit der störenden Wirkung des Leiters, zu messen durch

$$e' : e = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Das Dielektrikum übt also stets einen geringeren Einfluß aus als der Leiter. Im Grenzfalle indessen, wo die Dielektrizitätskonstante ε_2 des Isolators sehr groß ist gegen diejenige der Luft, wird $e' = e$, d. h. der Leiter beeinflußt das Feld im Luftraume ebenso, wie ein Isolator von der Dielektrizitätskonstante unendlich.

Was ferner die Feldstärke innerhalb des Dielektrikums betrifft, so entspricht diese der in A befindlichen freien Ladung $\frac{e''}{\varepsilon_2}$ in einem unbegrenzten Dielektrikum; würde das Dielektrikum entfernt, so wäre die Feldstärke hier aus der freien Ladung $\frac{e}{\varepsilon_1}$ zu bestimmen, welche dem im Luftraume befindlichen Punkte A wirklich zukommt. Das Eindringen des Feldes wird demnach gemessen durch den Quotienten

$$\frac{e''}{\varepsilon_2} : \frac{e}{\varepsilon_1} = 2\varepsilon_1 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Im Grenzfalle unendlicher Dielektrizitätskonstante ε_2 ist die elektrische Feldstärke im Innern des Isolators Null, genau wie im Innern eines Leiters.

Für das Eindringen der elektrischen Verschiebung trifft das allerdings nicht zu; dieses wird gemessen durch das Verhältnis der wahren Ladungen

$$e'' : e = 2\varepsilon_2 : \varepsilon_2 + \varepsilon_1,$$

welches im Grenzfalle eines unendlichen Wertes von ε_2 gleich 2 wird. Die Zahl der in den Halbraum eintretenden Verschiebungslinien ist offenbar, falls der ganze Raum mit Luft gefüllt ist, gleich $\frac{e}{2}$, der halben wahren Ladung von A; denn die Verschiebungslinien gehen in diesem Falle von A radial aus, nach allen Seiten in gleicher Dichte. Ist hingegen der Halbraum von dem Dielektrikum eingenommen, so entspricht, wie wir sehen, die eintretende elektrische Verschiebung einer in A befindlichen wahren Ladung e''; mithin ist die Zahl der in den Halbraum eintretenden Verschiebungslinien

$$\frac{e''}{2} = e \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}.$$

Es muß demnach von den e Verschiebungslinien, welche im Punkte A beginnen, der Teil

$$e \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

jenseits des Dielektrikums endigen, der Rest

$$e \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

jenseits des Luftraumes; hier sind etwa leitende Körper anzunehmen, auf denen die Verschiebungslinien endigen. Im Grenzfalle $\varepsilon_2 = \infty$ befindet sich die wahre Ladung $-e$ jenseits des Dielektrikums, während sie in dem zum Vergleiche herangezogenen Falle des Leiters auf der Leiteroberfläche sitzt. Die freie Ladung hingegen verteilt sich in dem hier betrachteten Falle über die Begrenzungs-

ebene des Dielektrikums von unendlicher Dielektrizitätskonstante genau so, wie über die Oberfläche des Leiters, da ja die Feldstärken in beiden Fällen die gleichen sind.

§ 41. Die Polarisation der Dielektrika.

Wir kehren zum allgemeinen Falle beliebiger isotroper Dielektrika zurück. Dieselben mögen teils an die mit wahrer Elektrizität geladenen Leiter unmittelbar angrenzen, teils in den leeren Raum eingebettet sein. Wir wollen jetzt versuchen, das elektrische Feld in zwei Felder zu zerlegen, von denen das erste $\mathfrak{E}_0$ von der an der Oberfläche der Leiter befindlichen wahren Elektrizität herrührt, während das zweite $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ von den dielektrischen Körpern auszugehen scheint. Dabei soll $\mathfrak{E}_0$ aus der Flächendichte ω der wahren Elektrizität nach den Gesetzen berechnet werden, die für das Feld im leeren Raume gelten, also folgendermaßen

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla\varphi_0, \quad \varphi_0 = \int \frac{df\,\omega}{r}.$$

Zu dem Potentiale φ_0 liefern nur die Flächen Beiträge, in denen die Metalle an den leeren Raum bzw. an Dielektrika angrenzen.

Für das Feld $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ gilt jetzt, nach (138a)

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = -\nabla(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi - \varphi_0 = \int \frac{dv\,\varrho'}{r} + \int \frac{df(\omega' - \omega)}{r};$$

zu dem Potentiale $\varphi - \varphi_0$ liefern demnach alle mit freier Elektrizität behafteten Volumelemente der Dielektrika Beiträge, sowie die Grenzflächen, welche Dielektrika vom Äther bzw. von den Metallen, oder welche zwei Dielektrika trennen. Dabei gilt an solchen Trennungsflächen, nach (137 und 137a)

$$\omega' - \omega = -\left\{\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_{\nu 1} - \mathfrak{D}_{\nu 1} + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_{\nu 2} - \mathfrak{D}_{\nu 2}\right\}.$$

Im Äther ist ferner

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

während im Innern der Metalle ein elektrostatisches Feld überhaupt nicht auftritt. Es bleibt daher an den Flächen, in denen ein Dielektrikum an den leeren Raum oder an ein Metall angrenzt, nur der auf das Dielektrikum bezügliche Summand bestehen

$$\omega' - \omega = -\left\{\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{D}_\nu\right\},$$

wo ν die von dem Innern des Dielektrikums aus nach der Oberfläche hinweisende Normale bezeichnet.

An der Trennungsfläche zweier Dielektrika bleibt der allgemeinere Ausdruck für $(\omega' - \omega)$ gültig, der sich aus zwei auf die einzelnen Dielektrika bezüglichen Termen zusammensetzt. Wir wollen jedoch den Übergang eines Dielektrikums in ein anderes als stetig voraussetzen, so daß die Übergangsschicht als inhomogenes, mit freier räumlicher Ladung behaftetes Dielektrikum anzusehen ist. Es gilt hier, wie überhaupt in inhomogenen Isolatoren, nach (137a, 137c)

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} - \mathfrak{D}\right).$$

Wir führen nunmehr einen neuen Vektor $\mathfrak{P}$ ein

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}, \tag{142}$$

den wir „elektrische Polarisation" des Dielektrikums nennen. Dann wird an der Grenzfläche des Dielektrikums, sei es, daß Metall oder daß Äther an dieses angrenzt, wenn ν die vom Dielektrikum aus nach der Grenzfläche weisende Normale bezeichnet

$$\omega' - \omega = \mathfrak{P}_\nu, \tag{142a}$$

und im Innern des Dielektrikums

$$\varrho' = -\operatorname{div} \mathfrak{P}. \tag{142b}$$

Demgemäß ist das Potential des Feldes $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0)$

$$\varphi - \varphi_0 = -\int \frac{dv}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \int \frac{df}{r} \mathfrak{P}_\nu.$$

Wendet man auf den von dem Dielektrikum eingenommenen Raum die aus dem Gaußschen Satze abgeleitete Integraltransformation (73) an, so wird

$$\int \frac{df \mathfrak{P}_\nu}{r} = \int dv \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{P} \cdot \nabla_q \frac{1}{r} \right\}.$$

Dabei bezieht sich die Operation

$$\nabla_q \frac{1}{r}$$

auf Verrückung des Quellpunktes (vgl. § 21). Der Aufpunkt, der irgendwo im Raume liegen kann, wird bei Ausführung der Verrückung festgehalten. Durch Anwendung dieser Umformung erhält man

$$\varphi - \varphi_0 = \int dv \left(\mathfrak{P}, \nabla_q \frac{1}{r} \right) \tag{142c}$$

als Potential des Dielektrikums.

Die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes geht aus der Formel (81) hervor, die im § 21 für das Potential einer Doppelquelle erhalten wurde. Es war, wenn $\mathfrak{m}$ das Moment einer solchen bezeichnet,

$$\left(\mathfrak{m}, \nabla_q \frac{1}{r} \right)$$

das Potential der erzeugten Strömung. Wir können jetzt das wirbelfreie Feld $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0)$ als von Doppelquellen erzeugt ansehen. Dabei ist $\mathfrak{P} \cdot dv$ das Moment der im Volumelement dv des Dielektrikums enthaltenen Doppelquellen, mithin $\mathfrak{P}$ das Moment der Volumeinheit. Wir können etwa das Dielektrikum in zylindrische Volumelemente zerlegen, von dem Querschnitte σ nach der Höhe l, deren Grundflächen zu $\mathfrak{P}$ senkrecht sind. Dann ist

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{P} \cdot \sigma \cdot l$$

das Moment des Volumelementes dv.

Erinnern wir uns nun der Art, wie im § 21 das Moment der Doppelquelle definiert wurde; es wurde ein Quellpunkt und ein Senkpunkt angenommen; die vom Senkpunkt nach dem

Quellpunkt weisende Richtung gab die Richtung von $\mathfrak{m}$ an, das Produkt aus der Ergiebigkeit des Quellpunktes und dem Abstand l vom Senkpunkte den Betrag dieses Vektors. Wir haben demnach die Grundflächen aller der zylindrischen Volumelemente mit Ladungen $\pm|\mathfrak{P}|\cdot\sigma$ zu belegen und jedes Volumelement als Doppelquelle des Kraftflusses zu betrachten. Das Feld $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_0$ ist sowohl außerhalb wie auch innerhalb des vom Dielektrikum eingenommenen Raumes identisch mit dem Felde, welches ein solches System von Doppelquellen des Kraftflusses im Äther erzeugen würde. So rechtfertigt sich auch die Beziehung des Vektors $\mathfrak{P}$ als elektrische Polarisation des Dielektrikums.

Wir sind bisher analytisch verfahren, indem wir das Dielektrikum zunächst als Ganzes behandelten und dann in Volumelemente zerlegten. Wir können auch synthetisch von dem einzelnen Volumelemente ausgehen; denken wir uns aus einem solchen zylindrischen Elemente, dessen Mantelfläche von Kraftlinien gebildet wird, die Materie entfernt, das Feld aber unverändert gelassen, so werden zwar an der Mantelfläche die Grenzbedingungen erfüllt sein, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und der normalen Komponenten von $\mathfrak{D}$ verlangen, aber an den Grundflächen nicht ohne weiteres. Die elektrische Verschiebung durch die Querschnitte des Zylinders, die vor Entfernung der Materie $|\mathfrak{D}|\cdot\sigma$ betrug, ist jetzt nur

$$\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}|\cdot\sigma.$$

Außerhalb des zylindrischen Elementes hingegen besteht dieselbe elektrische Verschiebung wie vorher.

Es beginnen also jetzt auf den Grundflächen des Zylinders Verschiebungslinien in der Zahl

$$\pm\sigma\left\{|\mathfrak{D}|-\frac{1}{4\pi}\cdot|\mathfrak{E}|\right\}=\pm\sigma\cdot|\mathfrak{P}|.$$

Das ist nur möglich, wenn daselbst wahre Ladungen mit der Flächendichte $\pm|\mathfrak{P}|$ ihren Sitz haben. Die in dem Volumelement enthaltene Materie läßt sich hinsichtlich ihres Ein-

flusses auf das elektrische Feld durch eine solche Doppelbelegung ersetzen. Man kann nun nacheinander die Materie aus den einzelnen Volumelementen des Dielektrikums entfernen und statt ihrer fingierte Flächenbelegungen der Volumelemente mit positiver und negativer Elektrizität einführen. So gelangt man zur Formel (142c) für das Potential des Dielektrikums. Ist das Produkt $\sigma \cdot |\mathfrak{P}|$ längs einer aus Kraftlinien gebildeten Röhre konstant, so heben sich die positiven und negativen Ladungen benachbarter Volumelemente auf. In einem homogenen Dielektrikum, wo ε konstant ist und daher $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{D}$ nur um konstante Faktoren verschieden sind, findet dieses statt; hier bleiben nur auf der Begrenzungsebene des Dielektrikums fingierte Ladungen übrig. In einem inhomogenen Dielektrikum hingegen, wo ε von Ort zu Ort wechselt, heben sich die Flächenbelegungen der Volumelemente nicht auf, sie geben Anlaß zu einer räumlichen Divergenz von $\mathfrak{E}$, d. h. zu freier Elektrizität im Innern des Dielektrikums. Dieser Gedankengang, mathematisch präzisiert, würde uns zur Ausgangsformel für $\varphi - \varphi_0$ zurückführen.

Es geht aus diesen Betrachtungen hervor, daß die Annahme einer dielektrischen Polarisation der Isolatoren ein Kunstgriff ist, mit dessen Hilfe man die Bestimmung des elektrischen Feldes bei Anwesenheit beliebiger Dielektrika zurückführen kann auf die im vorigen Kapitel gelöste Aufgabe, das Feld elektrischer Ladungen im Äther zu ermitteln. Das Feld $\mathfrak{E}$ setzt sich zusammen aus dem von der wahren Elektrizität erzeugten und dem vom polarisierten Dielektrikum herrührenden. Es ist

$$(143) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \int \frac{df\omega}{r} + \int dv \left(\mathfrak{P}, \nabla_q \frac{1}{r}\right)$$

der allgemeine Ausdruck für das resultierende Feld.

Ist das Feld geladener Leiter im leeren Raume bekannt, und handelt es sich darum, den störenden Einfluß eines in das Feld gebrachten Isolators zu ermitteln, so reicht die Formel (143) zur Lösung des Problemes keineswegs aus. Denn selbst, wenn die entstehende Polarisation des Dielektrikums

bekannt wäre, so würde doch die Verteilung der wahren Elektrizität auf den Leiter durch Einführung des Dielektrikums geändert sein und es wäre unzulässig, für die Flächendichte ω der wahren Elektrizität den vor Einführung des Isolators geltenden Wert zu setzen. Das ist nur dann gestattet, wenn das eingeführte Dielektrikum so klein, seine Polarisation so gering und seine Entfernung von den Oberflächen der Leiter so groß ist, daß seine Rückwirkung auf die Elektrizitätsverteilung daselbst zu vernachlässigen ist. In diesem Falle kann man das Feld $\mathfrak{E}_0$ als gegeben betrachten; es führt dann die Formel (143) die Bestimmung des resultierenden Feldes zurück auf die Aufgabe, die Polarisation des Dielektrikums zu finden. Indessen, in dieser Allgemeinheit ist auch die letztgenannte Aufgabe nicht lösbar. Man wird sie weiter vereinfachen, indem man ein homogenes Feld $\mathfrak{E}_0$ annimmt, weiter das Dielektrikum als homogen, d. h. ε als durchweg konstant betrachtet; endlich wird man sich auf einfache Körperformen beschränken. Wir behandeln die einfachste, nämlich die Kugel. Es stellt sich heraus, daß die Polarisation, welche eine dielektrische Kugel im homogenen Felde $\mathfrak{E}_0$ annimmt, ihrerseits homogen, d. h. im ganzen Dielektrikum konstant ist. Wir weisen diese Behauptung als richtig nach, indem wir das Feld der homogen polarisierten Kugel bestimmen und zeigen, daß es sich den Grenzbedingungen der vorgelegten Aufgabe anpassen läßt.

§ 42. Eine homogen polarisierte Kugel.

Wir setzen wieder

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0),$$

nehmen $\mathfrak{E}_0$ in dem betrachteten, von der dielektrischen Kugel eingenommenen Raume als konstant an und erhalten aus (143) das Potential der homogen polarisierten Kugel

$$\varphi - \varphi_0 = \int dv \left(\mathfrak{P}, \nabla_q \frac{1}{r}\right) = \mathfrak{P} \cdot \int dv \nabla_q \frac{1}{r}.$$

Die Bedeutung des letzteren Ausdruckes ist folgende: Man berechne das Potential einer mit der räumlichen Dichte ϱ geladenen Kugel

$$\int \frac{dv\,\varrho}{r}$$

und einer mit der Dichte $-\varrho$ geladenen, um die Strecke $\frac{1}{\varrho}$ in einer dem Vektor $\mathfrak{P}$ entgegengesetzten Richtung gegen die erste verschobenen und gehe zur Grenze über, indem man ϱ immer größer macht. Der Grenzwert, multipliziert mit dem Betrage von $\mathfrak{P}$, ist das gesuchte Potential der dielektrischen Kugel. Man hat nun solche Punkte zu unterscheiden, die außerhalb und die innerhalb der dielektrischen Kugel liegen. Es sei a der Radius der Kugel, R der Abstand eines Aufpunktes von ihrem Mittelpunkte. Außerhalb der Kugel wirkt jede der beiden mit der Dichte ϱ bzw. $-\varrho$ geladenen Kugeln so, als ob ihre gesamte Ladung $V\varrho$, $-V\varrho$ im Mittelpunkte vereinigt wäre (vgl. § 22). Geht man zur Grenze über, indem man den Abstand $\frac{1}{\varrho}$ kleiner und kleiner macht, so erhält man eine Doppelquelle vom Momente V. Mithin wird

$$(144)\quad \varphi - \varphi_0 = \mathfrak{P}\, V \nabla_q \frac{1}{R} = -\mathfrak{P} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \nabla_a \frac{1}{R} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^3}{R^2} (\mathfrak{R}\mathfrak{P})$$

für $R \geqq a$, wobei $\mathfrak{R}$ den vom Mittelpunkte der dielektrischen Kugel nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor darstellt.

Für einen innerhalb gelegenen Aufpunkt ist das Potential der beiden positiv bzw. negativ geladenen Kugeln nach Gleichung (83b) des § 22

$$\pm \left(2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right) \varrho.$$

Die beiden Kugeln sind jetzt um $\frac{1}{\varrho}$ gegeneinander verschoben zu denken und es ist zur Grenze verschwindenden Abstandes überzugehen. Man erhält als resultierendes Potential

$$\nabla_q \left\{2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3} R^2\right\} = +\nabla_a \frac{2\pi}{3} R^2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \mathfrak{R},$$

es wird daher

$$\text{(144a)} \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}(\mathfrak{N}\mathfrak{P}), \text{ für } R \leqq a.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß für $R = a$ die Potentiale (144) und (144a) stetig ineinander übergehen. Das von der dielektrischen Kugel erzeugte Feld wird innerhalb derselben

$$\text{(144b)} \qquad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = -\nabla(\varphi - \varphi_0) = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}, \quad R \leqq a.$$

Das Feld, das von der homogen polarisierten Kugel erzeugt wird, ist innerhalb der Kugel selbst homogen und der Polarisation entgegengerichtet.

Außerhalb der Kugel mögen die Komponenten des Vektors $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ auf rechtwinklige Koordinaten xyz bezogen werden, wobei die z-Achse in die Richtung von $\mathfrak{P}$ gelegt werde. Es ist nach (144)

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{4\pi a^3}{3} \mid \mathfrak{P} \mid \frac{z}{R^3} = V \cdot \mid \mathfrak{P} \mid \cdot \frac{z}{R^3},$$

daher

$$\text{(144c)} \qquad \left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}_x - \mathfrak{E}_{0x} = V \cdot \mid \mathfrak{P} \mid \cdot \frac{3zx}{R^5}, \quad \mathfrak{E}_y - \mathfrak{E}_{0y} = V \mid \mathfrak{P} \mid \cdot \frac{3zy}{R^5} \\ &\mathfrak{E}_z - \mathfrak{E}_{0z} = V \cdot \mid \mathfrak{P} \mid \left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) \end{aligned}\right\} R \geqq a.$$

Wir fragen jetzt, welche Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ vor Einführung der dielektrischen Kugel vorhanden sein mußte, damit die Kugel, in das Feld gebracht, die Polarisation $\mathfrak{P}$ erhält. Es liegt nahe, $\mathfrak{E}_0$ gleichfalls der z-Achse parallel anzunehmen. Wir berechnen die radiale und die zur Kugel tangentielle Komponente der Feldstärke $\mathfrak{E}$; innerhalb der dielektrischen Kugel ist nach (144b)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \mid \mathfrak{E}_0 \mid \cos\vartheta - \frac{4\pi}{3} \cdot \mid \mathfrak{P} \mid \cos\vartheta \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= \mid \mathfrak{E}_0 \mid \cdot \sin\vartheta - \frac{4\pi}{3} \mid \mathfrak{P} \mid \sin\vartheta \end{aligned}\right\} R \leqq a.$$

Dabei gibt ϑ den Winkel an, den der Radiusvektor mit der z-Achse einschließt und $\mathfrak{E}_\vartheta$ die tangentielle Komponente von $\mathfrak{E}$, die längs der Meridiane der Kugeln weist.

Außerhalb der Kugel hingegen ist nach (144c)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= |\,\mathfrak{E}_0\,| \cos\vartheta + \frac{4\pi a^3}{3}\cdot|\,\mathfrak{P}\,|\cdot\frac{2\cos\vartheta}{R^3} \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= |\,\mathfrak{E}_0\,| \sin\vartheta - \frac{4\pi a^3}{3}|\,\mathfrak{P}\,|\cdot\frac{\sin\vartheta}{R^3} \end{aligned}\right\} R \geqq a.$$

Nun verlangen die Grenzbedingungen, die an der Oberfläche des Dielektrikums gelten: erstens sollen die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ innerhalb und außerhalb der Kugel die gleichen Werte besitzen; da $\mathfrak{E}_0$ innerhalb und außerhalb derselbe Vektor ist, so ist diese Bedingung bereits erfüllt. Zweitens sollen die Normalkomponenten der elektrischen Verschiebung innerhalb und außerhalb die gleichen Werte besitzen. Im Äther ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\cdot\mathfrak{E},$$

im Dielektrikum

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\mathfrak{E}.$$

Mithin verlangt die zweite Grenzbedingung

$$\varepsilon\left\{|\,\mathfrak{E}_0\,| - \frac{4\pi}{3}|\,\mathfrak{P}\,|\right\} = |\,\mathfrak{E}_0\,| + \frac{8\pi}{3}|\,\mathfrak{P}\,|,$$

oder

$$\frac{4\pi}{3}\cdot|\,\mathfrak{P}\,|(\varepsilon+2) = |\,\mathfrak{E}_0\,|(\varepsilon-1),$$

und da die Richtungen der beiden Vektoren $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{P}$ übereinstimmend gewählt waren

$$\mathfrak{P} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\mathfrak{E}_0. \tag{145}$$

Die so bestimmte äußere Feldstärke genügt allen Bedingungen des Problems. Umgekehrt, wenn die dielektrische Kugel in ein homogenes Feld $\mathfrak{E}_0$ gebracht wird, so entsteht eine Polarisation, die homogen und $\mathfrak{E}_0$ parallel ist und die genauer durch (145) bestimmt wird. Was die resultierende Feldstärke im Innern der Kugel anbelangt, so beträgt dieselbe nach (144b)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = \frac{3}{\varepsilon+2}\cdot\mathfrak{E}_0; \tag{145a}$$

die elektrische Verschiebung endlich ist nach (142)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} + \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2} \cdot \mathfrak{E}_0. \tag{145b}$$

Das Feld außerhalb der Kugel entsteht durch Superposition des ursprünglichen Feldes $\mathfrak{E}_0$ und des Feldes, das von einer im Mittelpunkte der Kugel befindlichen Doppelquelle des Kraftflusses vom Momente (vgl. 144)

$$\mathfrak{P} \cdot V = \mathfrak{P} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot a^3 \cdot \mathfrak{E}_0 \tag{145c}$$

erzeugt wird.

Es ist von Interesse, den Grenzfall $\varepsilon = \infty$ zu betrachten. Hier wird innerhalb der Kugel $\mathfrak{E}$ gleich Null, das Potential demnach konstant; das war die Bedingung, die für die leitende Kugel galt, es ist also das dieser Grenzbedingung entsprechende äußere Feld identisch mit dem Felde einer leitenden Kugel von der Gesamtladung Null. Die störende Wirkung einer solchen leitenden Kugel läßt sich demnach darstellen durch eine Doppelquelle vom Momente $a^3 \mathfrak{E}_0$ im Mittelpunkte der Kugel.

Alle diese Folgerungen setzen, wie schon bemerkt wurde, voraus, daß die in das Feld $\mathfrak{E}$ gebrachte Kugel, sei sie nun leitend oder dielektrisch, die ursprüngliche Verteilung wahrer Elektrizität, welche das Feld $\mathfrak{E}_0$ im Äther erzeugte, nicht wesentlich ändert.

Drittes Kapitel.

Die Energie und die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes.

§ 43. Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie.

Als Merkmal des elektrostatischen Feldes wurde im § 33 das Fehlen einer das Bestehen des Feldes begleitenden Wärmeentwickelung angesehen. Würde eine solche stattfinden, so wäre zur Erhaltung des Feldes eine dauernde Energiezufuhr

erforderlich. Das ist nicht der Fall. Wohl aber ist eine einmalige Arbeitsleistung notwendig, um das Feld zu erregen, eine Arbeitsleistung, die nach dem Energieprinzip von dem Wege, auf dem die Herstellung des Feldes geschah, unabhängig ist. Diese Arbeitsleistung ist das Maß der Energie des elektrostatischen Feldes, bezogen auf den unelektrischen Zustand als Normalzustand. Beim Erlöschen des Feldes geht die elektrische Energie wiederum in andere Energieformen über.

Die Fernwirkungstheorie der Elektrizität sah den elektrischen Zustand als einen eigentümlichen Zustand der Körper an, und als wesentlichste Zustandsgröße die elektrische Ladung der Körper; dementsprechend ging sie von einer Definition der elektrischen Energie aus, welche diese von den Ladungen und Potentialen der Körper abhängig macht. Die Nahewirkungstheorie hingegen sieht das ganze Feld als Träger des elektrischen Zustandes an und als wesentlichste Zustandsgrößen die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, die elektrische Feldstärke und die elektrische Verschiebung. Demgemäß verteilt sie die elektrische Energie über die Volumelemente des Feldes; jedes Volumelement liefert einen Beitrag zu der Feldenergie, der nur von einem elektrischen Zustande abhängt. Der auf die Volumeinheit entfallende Anteil an der Feldenergie soll nun gleich dem halben skalaren Produkte der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$$

sein.

Man kann diesen zunächst willkürlich scheinenden Ansatz durch ein mechanisches Bild erläutern. Man denke sich ein den Raum erfüllendes Agens, die Verschiebung der in der Volumeinheit enthaltenen Menge desselben sei durch $\mathfrak{D}$ gegeben, so daß der Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung hier wirklich durch eine Verschiebung dargestellt wird. Es soll ferner das Agens durch quasielastische Kräfte an seine Gleichgewichtslage gebunden sein. $\mathfrak{E}$ soll die äußere Kraft sein, welche die Teile des Agens aus der Gleichgewichtslage zu

entfernen strebt; die Verschiebung wird dann der äußeren Kraft proportional sein, entsprechend der Gleichung (136)

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}.$$

Die Dielektrizitätskonstante ε ist, falls das Agens den ganzen Raum mit gleicher Dichte erfüllt, der quasielastischen Kraft umgekehrt proportional zu setzen. Die pro Volumeinheit von der äußeren Kraft $\mathfrak{E}$ gegen die quasielastische, in die Gleichgewichtslage zurückziehende Kraft

$$-\frac{4\pi\mathfrak{D}}{\varepsilon}$$

geleistete Arbeit wird alsdann

$$\int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{D} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2.$$

Diese Vorstellung kann natürlich nicht zur Rechtfertigung, sondern nur zur Veranschaulichung des von der Nahewirkungstheorie zugrunde gelegten Energieausdruckes dienen. Seine Rechtfertigung findet der Ansatz dadurch, daß die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes, die aus ihm abgeleitet werden, der Erfahrung entsprechen. Bevor wir dieses nachweisen, wollen wir indessen zeigen, daß für die gesamte Energie des elektrostatischen Feldes aus der Nahewirkungstheorie sich der gleiche Wert ergibt, wie aus der Fernwirkungstheorie.

Die gesamte elektrische Feldenergie beträgt

$$U = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}). \tag{146}$$

Dabei ist nach (138) der Vektor $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, $-\mathfrak{E}$ ist der Gradient des Potentiales φ. Der entstehende Ausdruck

$$U = -\frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D},\ \nabla\varphi)$$

wird nun mit Hilfe der aus dem Gaußschen Satze abgeleiteten Formel (73) umgeformt in

$$U = \frac{1}{2}\int dv\,\varphi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D} - \frac{1}{2}\int df\,\varphi\,\mathfrak{D}_\nu;$$

ν bezeichnet dabei die äußere Normale der Begrenzungsfläche f des betrachteten Raumes. Der Raum, über den das Integral zu erstrecken ist, ist hier der leere und der von Isolatoren erfüllte Raum; denn innerhalb der metallischen Leiter ist kein Feld und daher auch keine Feldenergie vorhanden. Auf das ganze Feld dürfen wir die Formel (73) allerdings nur dann anwenden, wenn keine Diskontinuitätsflächen das Feld durchsetzen. Wir haben uns bei der Anwendung jener Formel den Übergang aus einem Isolator in den anderen als kontinuierlich zu denken, so daß nur räumliche Divergenz von $\mathfrak{D}$, nicht Flächendivergenz in Rechnung zu ziehen ist; übrigens würden auch Diskontinuitätsflächen sich leicht berücksichtigen lassen durch Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, die im § 28 zur Formel (108a) für die Energie des wirbelfreien Strömungsfeldes führten. Wir brauchen hierauf um so weniger einzugehen, als nach (137c) sowohl die räumliche Divergenz von $\mathfrak{D}$ im Innern der Dielektrika, als auch an der Grenzfläche zweier Dielektrika die Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$ verschwindet. Wahre Ladung tritt nur an der Oberfläche der Leiter auf. Ihre Flächendichte ω wird durch die nach dem Innern des Isolators hinweisende Komponente von $\mathfrak{D}$ angegeben. Da auch die unendlich entfernte Begrenzungsfläche f keinen Beitrag liefert, so wird die Energie U gegeben durch das über die Oberflächen der Leiter erstreckte Integral

$$U = \frac{1}{2}\int df\,\varphi\,\omega. \tag{146a}$$

Ebenso wie wir die Energie eines wirbelfreien Strömungsfeldes, die zunächst über das ganze Feld verteilt war, ausdrücken konnten durch Integrale über das Quellengebiet (Gleichung 84 und 108a), so können wir die elektrostatische

Energie, die nach der Maxwellschen Theorie über die Volumelemente des Feldes verteilt ist, auf eine Form bringen, in der sie über die wahren Ladungen verteilt erscheint; diese Verteilung der Energie über die wahren Ladungen ist die von der Fernwirkungstheorie angenommene. Das Potential φ ist dabei natürlich das Potential der freien elektrischen Ladungen (vgl. Formel 138a).

Ist das Feld von einem homogenen isotropen Dielektrikum erfüllt, so treten auch die freien Ladungen nur an der Oberfläche der Leiter auf und zwar mit der Dichte

$$\omega' = \frac{\omega}{\varepsilon}.$$

Dann wird

$$\varphi = \int \frac{df\,\omega'}{r} = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{df\,\omega}{r},$$

daher

$$U = \frac{1}{2}\int df_1\,\omega_1 \int \frac{df_2\,\omega_2'}{r_{12}}.$$

Dabei kommt jedes Flächenelement der Leiteroberflächen zweimal vor, einmal als Träger der freien Elektrizität, die zu dem Potential einen Beitrag liefert, und einmal als Träger der wahren Elektrizität. Rechnet man jedes Flächenelement nur einmal, so fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ fort und es wird

$$(146\text{b}) \quad \begin{cases} U = \iint \frac{df_1\,df_2\,\omega_1\,\omega_2'}{r_{12}} = \frac{1}{\varepsilon}\iint \frac{df_1\,df_2\,\omega_1\,\omega_2}{r_{12}} \\ \quad = \varepsilon \cdot \iint \frac{df_1\,df_2\,\omega_1'\,\omega_2'}{r_{12}}. \end{cases}$$

Hat man ein System wahrer Ladungen zuerst im leeren Raume und füllt dann den Raum mit einem Dielektrikum, so wird die elektrostatische Energie im Verhältnis $\frac{1}{\varepsilon}$ verkleinert bei konstant gehaltenen wahren Ladungen, sie wird im Verhältnis ε vermehrt bei konstant gehaltenen freien Ladungen. In dem gleichen Verhältnis werden die aus der Energie abgeleiteten ponderomotorischen Kräfte geschwächt bzw. verstärkt.

Da auf den Leitern das Potential φ konstante Werte $\varphi_1 \ldots \varphi_i \ldots \varphi_n$ annimmt, so kann man den allgemeinen Ausdruck (146a) der elektrostatischen Energie auch folgendermaßen schreiben

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i. \tag{146c}$$

Bei der Anordnung des Kondensators, wo zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen $\pm e$ vorhanden sind, wird (vgl. § 36)

$$U = \frac{1}{2} e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{2K} = \frac{K \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}. \tag{146d}$$

Die Energie ist bei konstant gehaltener wahrer Ladung des Kondensators der reziproken Kapazität, bei konstant gehaltener Potentialdifferenz der Belegungen der Kapazität selbst proportional.

Da Fernwirkungstheorie und Nahewirkungstheorie für elektrostatische Felder zu demselben Werte der Gesamtenergie gelangen, so müssen sie auch stets dieselben Werte für die ponderomotorischen Kräfte ergeben. Denn diese Kräfte ergeben sich aus der Energie auf Grund mechanischer Prinzipien, wie wir sehen werden. Durch Beobachtungen über die Kräfte des elektrostatischen Feldes kann daher durchaus nicht zwischen den beiden Theorien weder zugunsten noch zuungunsten der Maxwellschen Theorie entschieden werden. Der Vorzug der Maxwellschen Theorie liegt nicht auf dem Gebiete der statischen, sondern auf dem der rasch wechselnden Felder; dort, wo das elektrische Feld aufhört, wirbelfrei zu sein, wo demnach ein skalares Potential nicht mehr existiert, wird der Ansatz, den die Fernwirkungstheorie für die Energie macht, hinfällig. Der Ansatz der Nahewirkungstheorie bleibt bestehen und dient zur Erklärung der Strahlungsvorgänge.

§ 44. Der Thomsonsche Satz.

Wir wollen in diesem Paragraphen von dem Grundproblem der Elektrostatik handeln. Gegeben sind eine Anzahl von

Leitern und die wahren Ladungen $e_1 \ldots e_n$, mithin die über die Leiteroberflächen $f_1 \ldots f_n$ erstreckten Integrale

$$(\alpha) \qquad \int \mathfrak{D}_\nu df_1 = e_1, \quad \int \mathfrak{D}_\nu df_2 = e_2 \ldots, \quad \int \mathfrak{D}_\nu df_n = e_n,$$

wo die Normale nach dem Isolator hinweist. Im Felde mögen sich beliebige Dielektrika befinden; im Innern derselben soll keine wahre Elektrizität angenommen werden; hier soll also

$$(\beta) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$$

sein.

Ebensowenig soll wahre Elektrizität an der Trennungsfläche zweier Dielektrika vorhanden sein, hier soll mithin

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{D}_{\nu 1} + \mathfrak{D}_{\nu 2} = 0$$

gelten.

Auch soll die Beziehung zwischen dielektrischer Verschiebung $\mathfrak{D}$ und elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$

$$(\delta) \qquad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}$$

gelten, wo ε die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Isolators ist. Die vier Bedingungen (α) bis (δ) wollen wir die „allgemeinen Bedingungen" nennen. Sie gelten, wie wir in späteren Abschnitten sehen werden, für ein ganz beliebiges elektrisches Feld. Für das elektrostatische Feld kommen noch die „besonderen Bedingungen" hinzu:

Es soll $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, also der negative Gradient eines überall stetigen Potentiales sein

$$(\varepsilon) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla \varphi.$$

Dieses Potential soll auf den Oberflächen der Leiter konstant sein. Es soll

$$(\zeta) \qquad \varphi = \varphi_1 \text{ auf } f_1, \quad \varphi = \varphi_2 \text{ auf } f_2, \ldots \varphi = \varphi_n \text{ auf } f_n$$

sein.

Wir denken uns neben diesem elektrostatischen Felde noch ein anderes Feld, dessen Feldstärke $\mathfrak{E}'$ und elektrische

Verschiebung $\mathfrak{D}'$ sein mag. Die Vektoren $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}'$ sollen zwar den allgemeinen Bedingungen (α) bis (δ), aber nicht den besonderen Bedingungen (ε), (ζ) Genüge leisten. Dann behauptet der Thomsonsche Satz: das neue Feld $\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'$ besitzt eine größere elektrische Energie als das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$.

Es soll sein

$$\frac{1}{2}\int(\mathfrak{D}'\mathfrak{E}')dv > \frac{1}{2}\int(\mathfrak{D}\mathfrak{E})dv. \tag{147}$$

Um diese Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\mathfrak{E}' - \mathfrak{E} = \mathfrak{E}'', \quad \mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = \mathfrak{D}''.$$

Das neue Feld $\mathfrak{E}''\mathfrak{D}''$ hat jetzt folgende Bedingungen zu erfüllen

$$\int \mathfrak{D}_\nu'' df_1 = 0, \quad \int \mathfrak{D}_\nu'' df_n = 0 \tag{α''}$$

an den Leiteroberflächen,

$$\operatorname{div}\mathfrak{D}'' = 0 \tag{β''}$$

im Innern eines jeden Dielektrikums, und

$$\mathfrak{D}_{\nu 1}'' + \mathfrak{D}_{\nu 2}'' = 0 \tag{γ''}$$

an der Grenze zweier Dielektrika.

Endlich ist allgemein

$$\mathfrak{D}'' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\mathfrak{E}''. \tag{δ''}$$

Wir setzen jetzt U, U', U'' für die Energien der drei Felder und erhalten

$$U' = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}'\mathfrak{E}') = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'',\ \mathfrak{E}+\mathfrak{E}'')$$

$$= U + U'' + \frac{1}{2}\int dv\{(\mathfrak{D}''\mathfrak{E}) + (\mathfrak{D}\mathfrak{E}'')\},$$

oder nach (δ), (δ'')

$$U' = U + U'' + \int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'').$$

Nach (ε) ist

$$\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = -\int dv(\mathfrak{D}'', \nabla\varphi),$$

und nach der Formel (73)

$$-\int dv(\mathfrak{D}''\nabla\varphi) = \int dv\,\varphi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}'' - \int df\varphi\mathfrak{D}_\nu'';$$

diese Formel ist allerdings nur auf die Gebiete anzuwenden, wo φ, $\mathfrak{D}$ sich stetig ändern, wir haben daher die Unstetigkeitsflächen, die zwei Isolatoren trennen, zu der Begrenzung des Feldes zu rechnen. Jedes Flächenelement einer solchen kommt zweimal vor, sein Beitrag verschwindet nach (γ'') ebenso wie das Volumintegral auf der rechten Seite der letzten Gleichung infolge von (β'') verschwindet. Es bleibt nur das über die Leiteroberflächen erstreckte Integral

$$-\int df\varphi\mathfrak{D}_\nu'',$$

in welchem wir das Vorzeichen umkehren müssen, um in Übereinstimmung mit der in (α, α'') angewandten Bezeichnung ν nach dem Innern des Isolators rechnen zu dürfen. Es wird

$$\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = \sum_{i=1}^{n}\int df_i\varphi\mathfrak{D}_\nu''.$$

Die Summe ist über die Oberflächen der n Leiter zu erstrecken. Da hier nach (ξ) φ konstant ist, so folgt aus (α'')

$$\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}'') = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\cdot\int df_i\mathfrak{D}_\nu'' = 0.$$

Daher wird schließlich

$$U' = U + U'',$$

wo

$$U'' = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}''\mathfrak{E}'') = \frac{1}{8\pi}\int dv\mathfrak{E}''^2$$

stets positiv ist, es sei denn, daß

$$\mathfrak{E}'' = 0$$

wäre, in welchem Falle

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D},$$

mithin das mit dem elektrostatischen zu vergleichende Feld mit diesem identisch sein würde. Jedes von $\mathfrak{E}'\mathfrak{D}'$ verschiedene elektrische Feld aber, welches den allgemeinen Grundgleichungen (α) bis (δ) Genüge leistet, ohne ein elektrostatisches Feld zu sein, besitzt eine größere Energie als das elektrostatische. Oder anders ausgedrückt: unter allen elektrischen Feldern, welche den allgemeinen Bedingungen (α) bis (δ) Genüge leisten, besitzt das elektrostatische, das außerdem noch (ε) und (ζ) befriedigt, die kleinste Energie.

Der Thomsonsche Satz leitet also das Feld, welches der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität entspricht, aus einem Minimalprinzip ab. Dieses Minimalprinzip entspricht ganz der Gleichgewichtsbedingung, die für schwere Körper im Schwerkraftfelde im § 11 abgeleitet wurde; diese Körper befinden sich im Gleichgewicht und zwar im stabilen Gleichgewicht, wenn die potentielle Energie der Schwerkraft in der betreffenden Konfiguration ein Minimum ist. Ebenso sehen wir hier, daß das Gleichgewicht der Elektrizität, die sich auf der Oberfläche festgehaltener Leiter befindet, durch ein Minimum der elektrischen Energie gekennzeichnet ist. Die elektrische Energie spielt demnach hier dieselbe Rolle, wie die potentielle Energie in der gewöhnlichen Mechanik.

Noch in anderer Hinsicht sind die obigen Entwickelungen bedeutungsvoll. Sie zeigen, daß es nicht zwei verschiedene Lösungen des elektrostatischen Problems geben kann. Die Ungleichung (147) besagte nämlich, daß für jedes vom elektrostatischen verschiedene Feld $\mathfrak{E}'\mathfrak{D}'$, welches den Bedingungen (α) bis (δ) genügt, die Energie $U' > U$ ist. Ist nun $\mathfrak{E}'\mathfrak{D}'$ selbst ein elektrostatisches Feld, so muß außerdem $U > U'$ gelten, was unmöglich ist. Folglich kann es nicht zwei verschiedene Lösungen des elektrostatischen Problems

geben; durch die Bedingungen (α) bis (ξ) ist das elektrostatische Feld eindeutig bestimmt.

Wir haben in früheren Abschnitten Lösungen des elektrostatischen Problems für spezielle Fälle gefunden, z. B. für den Kugelkondensator, für das gestreckte Rotationsellipsoid, für eine dielektrische Kugel im homogenen Felde. Wir stellten damals eine partikuläre Lösung auf, ohne uns darum zu kümmern, ob diese die einzige mögliche ist. Jetzt sehen wir nachträglich, daß dies in der Tat der Fall ist.

§ 45. Das Gesetz von Coulomb.

Das Coulombsche Gesetz bildet die experimentelle Grundlage der Fernwirkungstheorie. Es entsteht jetzt die Aufgabe, das Gesetz aus der Maxwellschen Theorie herzuleiten. Hierzu ist außer den im vorigen Paragraphen zusammengestellten Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und dem Ansatze (146) für die Feldenergie noch eine dritte, zunächst hypothetische Annahme nötig, die den Zusammenhang zwischen Energie und ponderomotorischen Kräften betrifft.

Wir sahen (§ 43), daß die Feldenergie U nach dem Energieprinzip der Arbeit gleich ist, welche bei der Herstellung des Feldes geleistet wurde. Wir nehmen nun an, daß die Arbeit, welche die Kräfte des Feldes bei einer Verrückung der Leiter oder Dielektrika leisten, gleich der Abnahme der Feldenergie ist; es sollen also andere Energieumwandlungen außer der zwischen der elektrostatischen Feldenergie und der geleisteten mechanischen Arbeit bei dem ganzen Vorgange nicht im Spiele sein. Dabei ist natürlich ein abgeschlossenes System elektrischer Ladungen vorausgesetzt und es ist angenommen, daß die Lagenänderung der Körper langsam genug erfolgt, um das Feld in jedem Momente als elektrostatisches ansehen zu können. Alsdann soll die elektrische Feldenergie die Rolle der potentiellen Energie spielen, nicht nur insofern, als nach dem Thomsonschen Satze die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität durch ein Minimum

der elektrischen Feldenergie bei festgehaltenen Körpern charakterisiert war, sondern auch bezüglich der durch Lagenänderung der Körper aus dem Felde zu gewinnenden Arbeit.

Nehmen wir nun eine Lagenänderung der im Felde befindlichen Leiter oder Dielektrika vor, so entspricht der veränderten Lage auch eine veränderte Gleichgewichtsverteilung der auf den Leiteroberflächen angesammelten wahren Elektrizität. Wir wollen den Übergang von dem ersten elektrostatischen Felde zu dem zweiten, der veränderten Lage der Körper entsprechenden, in zwei Schritte zerlegen. Der erste Schritt soll, bei konstant gehaltener Lage der Körper, die Verteilung der wahren Elektrizität so abändern, wie es der beabsichtigten Lagenänderung der Körper entspricht, der zweite Schritt soll die Körper, ohne die Elektrizitätsverteilung zu ändern, in die neue Lage überführen. Die gesamte Änderung der Feldenergie setzt sich demgemäß aus zwei Änderungen $\delta_1 U$, $\delta_2 U$ zusammen. $\delta_1 U$ stellt die Variation der Energie bei festgehaltener Lage und Gesamtladung der Körper vor, die infolge der Abänderung der Elektrizitätsverteilung eintritt, $\delta_2 U$ die Variation der Energie infolge der Lagenänderung der Körper bei festgehaltener Elektrizitätsverteilung; auf die Reihenfolge der Variationen kommt es nicht an, da diese unendlich klein sind. Nun besagte aber der im vorigen Paragraphen bewiesene Thomsonsche Satz, daß die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität bei gegebener Gesamtladung und Lage der Körper einem Minimum von U entspricht. Es ist folglich

$$\delta_1 U = 0$$

und die Arbeit, welche die Kräfte des elektrostatischen Feldes bei einer unendlich kleinen Lagenänderung leisten, ist

$$\delta A = -\delta U = -\delta_2 U. \tag{148}$$

Die virtuelle Arbeit ist also gleich der Abnahme der elektrostatischen Feldenergie bei einer virtuellen Verrückung der Körper, dabei kann die wahre Elektrizität als fest an den Flächenelementen der Leiteroberflächen haftend angenommen werden.

Um nun aus diesem allgemeinen Prinzip zu dem Coulombschen Gesetze abzuleiten, denken wir uns zwei kleine Leiter, etwa mit Goldblatt überzogene Holundermarkkügelchen, im leeren Raume befindlich, oder in ein homogenes flüssiges Dielektrikum eingebettet. Es seien e_1, e_2 die wahren Ladungen der Kügelchen, ihre Abmessungen seien klein gegen den Abstand R ihrer Mittelpunkte. Wir bedienen uns des Ausdruckes (146a) für die elektrostatische Energie, der in diesem Falle ergibt

$$U = \frac{1}{2} e_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} e_2 \varphi_2.$$

Dabei sind φ_1, φ_2, die Potentiale der freien Ladungen, die an den Oberflächen der beiden Kügelchen sitzen,

$$\varphi_1 = \int \frac{df_1 \omega_1'}{r_{11}} + \int \frac{df_2 \omega_2'}{r_{12}}, \quad \varphi_2 = \int \frac{df_2 \omega_2'}{r_{22}} + \int \frac{df_1 \omega_1'}{r_{12}}.$$

Die bei einer Vergrößerung des Abstandes R von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit ist nun nach (148)

$$\delta A = -\delta_2 U = -\frac{1}{2} e_1 \delta \varphi_1 - \frac{1}{2} e_2 \delta \varphi_2.$$

Bei der virtuellen Verrückung ist die Dichte ω der wahren Elektrizität auf den Kugeln konstant zu halten. Da nun der Isolator als homogen, d. h. seine Dielektrizitätskonstante als durchweg konstant angenommen werden soll, so sind auch die Dichten der freien Elektrizität

$$\omega_1' = \frac{1}{\varepsilon} \omega_1, \quad \omega_2' = \frac{1}{\varepsilon} \omega_2$$

bei der Verrückung konstant zu halten. Es sind also die Variationen der ersten Glieder in φ_1, φ_2 gleich Null zu setzen und es bleiben nur die Variationen der zweiten, von den Wechselwirkungen der beiden Kügelchen herrührenden Glieder übrig.

Hier ist nun für r_{12} mit genügender Annäherung der Abstand R der Kugelmittelpunkte zu setzen. Sind ferner

$$e_1' = \int df_1 \omega_1' = \frac{1}{\varepsilon} \cdot e_1, \quad e_2' = \int df_2 \omega_2' = \frac{1}{\varepsilon} e_2$$

die freien Ladungen der Kügelchen, so wird

$$-\delta\varphi_1 = \frac{e_2'}{R^2}\delta R, \quad -\delta\varphi_2 = \frac{e_1'}{R^2}\delta R,$$

mithin ist

$$\delta A = \left(\frac{e_1 e_2' + e_2 e_1'}{2R^2}\right)\delta R$$

die virtuelle Arbeit.

Die Kraft, mit der die Kügelchen sich abstoßen, beträgt daher

(148a) $$\mathfrak{K}_R = \frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2} = \frac{\varepsilon \cdot e_1' e_2'}{R^2},$$

wie es das Coulombsche Gesetz verlangt.

Bei dieser Ableitung aus den Hypothesen der Nahewirkungstheorie wird die Dielektrizitätskonstante des Mediums in ungezwungenerer Weise eingeführt, als in der Fernwirkungstheorie. Führt man die Kügelchen, die sich zuerst in Luft gegenüberstanden, in Petroleum über, ohne daß sie mit einem Leiter in Berührung kommen, so bleiben ihre wahren Ladungen konstant, die abstoßende Kraft verkleinert sich im Verhältnis $\frac{1}{\varepsilon}$. Hingegen wächst die Kraft im Verhältnis ε, wenn wir die Kügelchen auf dasselbe Potential bringen, das sie vorher in Luft besaßen, etwa durch Berührung mit den Polen eines galvanischen Elementes.

Als ein weiterer Vorzug dieser Ableitung ist es anzusehen, daß die Umstände, unter denen das Coulombsche Gesetz gilt, deutlich zutage treten. Das Coulombsche Gesetz gilt z. B. nicht mehr für die beiden Kügelchen, wenn außer ihnen sich im leeren Raume irgendwo ein begrenzter dielektrischer Körper befindet. Dann ruft nämlich das von den Kügelchen erregte Feld auf der Oberfläche des Dielektrikums freie Ladungen hervor, welche auf die Kügelchen zurückwirken, falls die Entfernung nicht zu groß ist. Ebenso hört das Coulombsche Gesetz auf genau gültig zu sein, wenn das den Raum erfüllende Dielektrikum nicht homogen ist, d. h. wenn ε mit dem Orte variiert; dann ist es bei der obigen Betrachtung nicht mehr gestattet, die freien Ladungen der Kügelchen, als den wahren proportional, bei der Verrückung konstant zu halten. Glücklicherweise weicht für die Gase, deren Dielek-

trizitätskonstante wegen ihrer Kompressibilität vom Drucke abhängt, überhaupt der Wert von ε so wenig von 1 ab, daß die Kräfte, die aus der Inhomogenität der als Isolatoren dienenden Gase resultieren, außerordentlich klein und meist ganz zu vernachlässigen sind.

Wir wollen das allgemeine, zur Berechnung der ponderomotorischen Kräfte dienende Prinzip verwenden, um den ursprünglich für die Kraft auf einen in das Feld gebrachten Probekörper gemachten Ansatz zu rechtfertigen; würde doch das ganze System der Nahewirkungstheorie eine Lücke aufweisen, wenn die Wirkung des Feldes, durch die zuerst der Vektor $\mathfrak{E}$ definiert wurde, sich nicht jetzt als Folgerung der Theorie ergäbe. Wir bringen also jetzt ein einziges, mit Goldblatt überzogenes Holundermarkkügelchen in das homogene Dielektrikum in einigem Abstande von den Leitern, und geben ihm eine Ladung, die so gering ist, daß sie die Verteilung der freien Elektrizität an den Leiteroberflächen nicht merklich beeinflußt. Durch Hereinbringen des Probekügelchens hat nun nach (146b) das Feld einen Energiezuwachs erfahren

$$U_{12} = \int\int \frac{df_1\, df_2\, \omega_1\, \omega_2'}{r_{12}};$$

hier bezeichnet ω_1 die Dichte der wahren Elektrizität an der Oberfläche des Kügelchens, ω_2' die Dichte der freien Elektrizität, die sowohl an der Oberfläche des Kügelchens, wie auch auf den Leitern sitzen kann. Bei der virtuellen Verrückung $\delta\mathfrak{s}$ des Kügelchens ist nun die Dichte der wahren Elektrizität konstant zu halten, unserem Prinzip gemäß. Mithin ist die Dichte der freien Elektrizität an der Oberfläche des Kügelchens konstant zu halten, weil es sich in einem homogenen Dielektrikum befindet. Es fällt daher in δU_{12} alles fort, was sich auf Wechselwirkungen der freien und wahren Ladungen des Kügelchens selbst bezieht.

Es war nun angenommen, daß das Hereinbringen des Probekörpers in das Feld die ursprüngliche Verteilung der freien Elektrizität nicht merklich ändert. Es darf demnach

der Probekörper nicht zu nahe an die Leiteroberflächen heranrücken.

Ist diese Bedingung erfüllt und sind ferner die Abmessungen des Probekörpers hinreichend klein, so kann für r_{12} der Abstand des Mittelpunktes des Kügelchens von dem betreffenden Flächenelemente df_2 gesetzt und das äußere Feld als auf die Ausdehnung des Kügelchens hin homogen betrachtet werden. Alsdann wird die Arbeit bei der virtuellen Verrückung des Kügelchens

$$\delta A = -\delta_2 U_{12} = -\int df_1 \omega_1 \cdot \delta \int \frac{df_2 \omega_2'}{r_{12}} = -e_1 \delta \varphi,$$

wo e_1 die wahre Ladung des Kügelchens, φ das Potential ist, welches in dem betreffenden Punkte des Feldes vor dem Hereinbringen des Kügelchens vorhanden war. Die Kraft $\mathfrak{K}$, die auf das Kügelchen wirkt, folgt aus

$$(\mathfrak{K}\delta\mathfrak{s}) = \delta A = -e_1 \delta\varphi = -e_1(\nabla\varphi, \delta\mathfrak{s}).$$

Sie beträgt

$$\mathfrak{K} = -e_1 \nabla\varphi = e_1 \cdot \mathfrak{E},$$

was mit (124) vollkommen übereinstimmt.

Ist das Kügelchen nicht klein genug, so kommt die Inhomogenität des Feldes in Betracht; sie modifiziert die Kraft, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden.

§ 46. Eine dielektrische oder leitende Kugel im inhomogenen Felde.

Im allgemeinen kann man sagen, daß auf jeden im elektrischen Felde befindlichen Körper eine ponderomotorische Kraft wirkt, sei er nun mit wahrer Ladung behaftet oder nicht. Hat man es etwa mit dem Felde $\mathfrak{E}_0$ geladener Leiter im leeren Raume zu tun, in welches ein Isolator, etwa eine dielektrische Kugel gebracht wird, so wird eine solche Kugel von Kräften angegriffen, wenigstens dann, wenn das Feld nicht streng homogen ist. Um dieses zu zeigen, berechnen wir den Energiezuwachs $U - U_0$, der das Hereinbringen eines dielektrischen Körpers in das Feld zur Folge hat, wobei wir, ganz

wie im § 42, voraussetzen, daß der dielektrische Körper keinen merklichen Einfluß auf die Verteilung wahrer Elektrizität ausübt, welche das Feld $\mathfrak{E}_0$ erzeugte. In diesem Falle ist die Energie U_0 des ursprünglichen Feldes von der Lage der Kugel unabhängig und es kann die bei einer virtuellen Verrückung des Isolators geleistete Arbeit aus der Abnahme von

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{E}_0\mathfrak{D}_0)$$

berechnet werden. Dieser letztere Ausdruck gestattet nun eine allgemeine, für beliebige dielektrische Körper gültige Umformung in ein Integral über den von dem Dielektrikum eingenommenen Raum. Wir schreiben zunächst

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\cdot\int dv\{(\mathfrak{E},\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0,\ \mathfrak{D}_0)\}.$$

Was nun die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ anbelangt, so rührt sie von dem dielektrischen Körper her. Da dieser aber weder im Innern, noch an seiner Oberfläche wahre Ladungen trägt, und da die wahren Ladungen, welche die Felder $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_0$ erzeugen, die gleichen sind, so ist $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ im ganzen Raume quellenfrei, die durch Hereinbringen des Dielektrikums entstehenden Verschiebungslinien sind geschlossene Linien. Der Vektor $\mathfrak{E}$ anderseits ist wirbelfrei.

Nun hatten wir in der allgemeinen Theorie der Vektorfelder (§ 28) den Satz bewiesen: „Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null.“ Demnach verschwindet das Volumintegral des inneren Produktes

$$(\mathfrak{E},\ \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)$$

und es wird

$$U - U_0 = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0).$$

Wir bezeichnen nun mit v' den leeren, mit v'' den vom Dielektrikum eingenommenen Teil des Raumes. In v' ist

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0),$$

daher ist

$$\frac{1}{2} \int dv' (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) = \frac{1}{2} \int dv' (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Da ferner $\mathfrak{E}_0$ wirbelfrei ist, so ist auch das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes von $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ gleich Null, daher gilt

$$\frac{1}{2} \int dv' (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) = -\frac{1}{2} \int dv'' (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0).$$

Mithin wird für $U - U_0$ das über v'' zu erstreckende Integral erhalten

$$U - U_0 = \frac{1}{2} \int dv'' \{(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) - (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0)\}.$$

Hier ist weiter zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{D}_0$ sich ja auf das Feld bezogen, welches vor dem Hereinbringen des Dielektrikums bestand, d. h. auf ein Feld im Äther; folglich ist

$$\mathfrak{D}_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}_0$$

und

$$(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0).$$

Setzen wir ferner nach (142)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} + \frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{E},$$

so wird

$$(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0) = (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{P}) + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0).$$

Das schließliche Resultat ist

$$U - U_0 = -\frac{1}{2} \int dv'' (\mathfrak{E}_0 \mathfrak{P}). \tag{149}$$

Die Funktion, deren Abnahme die bei einer Verrückung des Dielektrikums von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit angibt, ist gleich einem

über das Dielektrikum erstreckten Integrale; der Integrand ist, bis auf den Faktor

$$\left(-\frac{1}{2}\right),$$

gleich dem inneren Produkte aus der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$, die von dem Hereinbringen des Dielektrikums bestand, und der Polarisation $\mathfrak{P}$ des Dielektrikums.

Wir wenden das Resultat auf eine dielektrische Kugel an, deren im Felde $\mathfrak{E}_0$ angenommene Polarisation durch (145) bestimmt war. Es wird für diese

$$(149a)\quad U - U_0 = -\frac{3}{8\pi}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\int dv''\cdot\mathfrak{E}_0^2 = -\frac{a^3}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\mathfrak{E}_0^2.$$

Obwohl bei der Ableitung der Polarisation im § 42 das Feld als homogen vorausgesetzt war, können wir doch jetzt die Kraft bestimmen, welche auf die Kugel wirkt, wenn das ursprüngliche Feld $\mathfrak{E}_0$ nicht vollkommen homogen war. Denn in diesem Falle stellt (149a) eine erste Annäherung für den Energiezuwachs dar, welchen das elektrische Feld durch Hereinbringen der dielektrischen Kugel erfährt; derselbe ist negativ. Daraus ergibt sich als Näherungswert für die ponderomotorische Kraft

$$(150)\qquad \mathfrak{K} = -\nabla(U - U_0) = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\nabla\mathfrak{E}_0^2.$$

Die im inhomogenen Felde wirkende Kraft sucht die dielektrische Kugel nach Stellen größerer Feldstärke hinzutreiben; denn hier wird die Feldenergie durch die Anwesenheit der Kugel stärker verkleinert. Von der Richtung der Feldstärke ist diese Kraft unabhängig.

Wir erwähnten am Schlusse des § 42, daß im Grenzfalle $\varepsilon = \infty$ die Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Innern der Kugel verschwindet. Es bleibt zwar in diesem Falle noch (145b) die elektrische Verschiebung im Innern der Kugel endlich, aber die elektrische Energie im Innern der Kugel ist Null. Außerhalb der Kugel aber stimmt das Feld mit dem einer vollkommen leitenden Kugel von gleichem Volumen überein, da das Potential auf der

Kugeloberfläche konstant ist. Folglich stimmt auch die Änderung der Feldenergie durch die Anwesenheit einer leitenden Kugel überein mit der Änderung der Feldenergie durch eine dielektrische Kugel vom gleichen Radius a und der Dielektrizitätskonstante unendlich. Die Feldenergie nimmt beim Hereinbringen der leitenden Kugel um $\frac{a^3}{2}\mathfrak{E}_0^2$ ab; hieraus ergibt sich

(150a) $$\mathfrak{K} = \frac{a^3}{2}\nabla\mathfrak{E}_0^2$$

als Ausdruck der Kraft, die auf eine ungeladene leitende Kugel im inhomogenen Felde wirkt.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Kraft, die auf ein geladenes, mit Goldblatt überzogenes Holundermarkkügelchen wirkt, berechnet, ohne auf die Inhomogenität des Feldes Rücksicht zu nehmen. Ziehen wir diese in Rechnung, so wird

(150b) $$\mathfrak{K} = e\cdot\mathfrak{E}_0 + \frac{a^3}{2}\nabla\mathfrak{E}_0^2$$

die resultierende Kraft sein. Man kann also, indem man den Radius a des Probekügelchens hinreichend klein wählt, es stets erreichen, daß das geladene Probekügelchen auch in inhomogenen Feldern die Feldstärke anzeigt, die vor seiner Anwesenheit an der betreffenden Stelle des Feldes herrschte.

Viertes Kapitel.

Der elektrische Strom.

§ 47. Die Gesetze von Ohm und Joule.

Das elektrostatische Feld wurde dadurch charakterisiert, daß es wirbelfrei ist und daß seine Erhaltung nicht von Wärmeentwickelung begleitet ist. Nun gibt es aber elektrische Felder, die gleichfalls konstant und wirbelfrei sind, deren Erhaltung aber von Wärmeentwickelung begleitet ist. Stellt

man etwa durch leitende Verbindung mit den Polen eines galvanischen Elementes zwischen zwei Punkten P_1, P_2 eine bestimmte Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ her und verbindet dann die beiden Punkte durch einen Leitungsdraht, so entsteht ein stationäres elektrisches Feld, welches innerhalb des Drahtes und in seiner Umgebung wirbelfrei, also von einem Potential φ abzuleiten ist. In dem Drahte findet gleichzeitig eine Wärmeentwickelung statt, auf Kosten der chemischen Energie des galvanischen Elementes. Man sagt in diesem Falle, in dem Drahte fließt ein galvanischer Strom. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß der nämliche Vorgang im Drahte sich abspielt, wenn man seine Enden statt mit den Polen eines Elementes mit den Belegungen eines Kondensators verbindet, und daß dabei wahre Elektrizität den Belegungen des Kondensators entzogen bzw. zugeführt wird. In diesem Falle ist man zweifellos berechtigt, von einem elektrischen Strome im Drahte zu sprechen; man wird die Stromstärke durch die zeitliche Änderung der wahren Ladung (e) der Kondensatorbelegungen messen

$$J = \frac{de}{dt}. \tag{151}$$

Bei dem vorhin betrachteten stationären Vorgange findet keine Änderung der wahren Ladung der Drahtenden statt. Nur die Identität der in diesem Falle und im Falle der Kondensatorentladung innerhalb des Leiters und in seiner Umgebung zu beobachtenden Zustandsänderungen ist es, die uns hier dazu berechtigt, von einem elektrischen Strome im Drahte zu reden. Der stationäre galvanische Strom eignet sich besser zur Untersuchung als der nichtstationäre Strom der Kondensatorentladung. Er hat zur Entdeckung der Grundgesetze des elektrischen Leitungsstromes geführt.

Das Ohmsche Gesetz wird, wenigstens in den elementaren Lehrbüchern der Physik, meist so ausgesprochen: Die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Leitung ist gleich dem Produkte aus Stromstärke und Widerstand

$$\varphi_1 - \varphi_2 = J \cdot R. \tag{152}$$

Dabei stellt $\varphi_1 - \varphi_2$ das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ von P_1 bis P_2 vor, J ist der Gesamtstrom, der durch die Querschnitte der Leitung von P_1 nach P_2 fließt, und R der Gesamtwiderstand des homogenen Leitungsdrahtes, welcher die beiden Punkte verbindet.

Das Ohmsche Gesetz ist eine reine Erfahrungstatsache; als solche läßt es sich wortgetreu nur durch das Integralgesetz (152) wiedergeben. Für die weitere theoretische Darstellung eignen sich aber weit besser die Differentialgesetze, die man erhält, wenn man jene Integralgesetze auf unendlich kleine Gebietsteile anwendet. Diese geben das Naturgesetz in strengerer Fassung wieder, da bei unendlich kleinen Gebietsteilen eine Reihe möglicher Komplikationen vermieden wird, deren ausdrückliche Ausschließung bei Leitern von endlichen Abmessungen nicht in allen Fällen zulässig ist.

Wir führen an Stelle der Stromstärke J die Stromdichte des elektrischen Leitungsstromes ein, die wir mit $\mathfrak{i}$ bezeichnen. Verteilt sich die Strömung gleichförmig über den Draht, so ist der Betrag des der Leitlinie parallelen Vektors $\mathfrak{i}$ einfach der Quotient aus Stromstärke und Querschnitt

$$|\mathfrak{i}| = \frac{J}{q}. \tag{152a}$$

Bei einer räumlich beliebig verteilten Strömung ist der Strom, der irgendein Flächenelement df in dem durch die Normalenrichtung ν angegebenen Sinne durchfließt, $\mathfrak{i}_\nu \cdot df$. Kennt man das Feld des Vektors $\mathfrak{i}$, so erhält man als Gesamtstrom durch eine beliebige Fläche f

$$J = \int \mathfrak{i}_\nu \cdot df. \tag{152b}$$

In dem Integralgesetze (152) ist stillschweigend angenommen, daß das Potential φ in den Querschnitten des Drahtes konstant ist, d. h. daß die Richtung des größten Gefälles, d. h. des Vektors $\mathfrak{E}$, der Stromrichtung parallel ist. In der Tat werden wir bei isotropen Körpern die Vektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ als einander parallel betrachten. Die Anwendung von

(152) auf ein zylindrisches Stück eines dünnen Drahtes von der Länge l, über dessen Querschnitt q sich die Strömung gleichförmig verteilt, ergibt

$$|\mathfrak{E}| \cdot l = |\mathfrak{i}| \cdot q \cdot R.$$

Für R ist hier $\frac{l}{\sigma q}$ zu setzen, wo σ die „spezifische Leitfähigkeit" des betreffenden Leiters ist. Alsdann erhält man das Ohmsche Gesetz als Differentialgesetz

$$\mathfrak{i} = \sigma \cdot \mathfrak{E}. \tag{153}$$

Das Ohmsche Gesetz besagt also, daß für einen isotropen Leiter die Stromdichte der elektrischen Feldstärke parallel ist und daß der Quotient der Beträge der beiden Vektoren eine Materialkonstante, also unabhängig von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ ist. Mit der chemischen und physikalischen Beschaffenheit des Leiters, insbesondere mit der Temperatur, wird sich natürlich auch die Leitfähigkeit σ ändern. Bei anisotropen, kristallinischen Leitern stimmen die Richtungen von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ im allgemeinen nicht überein; man stellt hier $\mathfrak{i}$ durch eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{E}$ dar, wie hier nebenbei bemerkt werden mag, obschon ein näheres Eingehen auf solche Fälle aus dem Rahmen dieser Schrift heraustritt.

Ebenso wie das Ohmsche wird auch das Joulesche Gesetz durch die Erfahrung unmittelbar in Form eines Integralgesetzes gegeben: Die Wärmeentwickelung, die pro Zeiteinheit in der ganzen Leitung stattfindet, ist

$$Q = J \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = R \cdot J^2; \tag{154}$$

sie ist natürlich in mechanischem Maße zu messen, da wir $\varphi_1 - \varphi_2$ und J in absoluten elektrostatischen Einheiten ausdrücken. Das zugehörige Differentialgesetz bezieht sich auf die pro Zeiteinheit und pro Volumeinheit entwickelte Wärme; diese beträgt

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{E} = \sigma \cdot \mathfrak{E}^2 = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathfrak{i}^2. \tag{155}$$

Die Gesetze von Ohm und Joule, die von der Erfahrung zunächst nur für stationäre Ströme bestätigt sind, werden

als auf die Volumelemente bezogene Differentialgesetze (153) und (155), von der Maxwellschen Theorie auch auf beliebig rasch wechselnde Felder angewandt; für die gesamte im Felde entwickelte Joulesche Wärme wird stets gesetzt

$$Q = \int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \int dv\, \sigma \mathfrak{E}^2. \tag{155a}$$

§ 48. Leitungsstrom und Verschiebungsstrom.

Für den stationären elektrischen Strom, der in einem ringförmigen Leiterkreise von irgendwelchen elektromotorischen Kräften erregt wird, gilt als allgemeines Grundprinzip der Satz, daß durch alle Querschnitte des Kreises der gleiche Gesamtstrom fließt. Sollte überhaupt irgendwo Elektrizität entstehen, so entsteht doch immer positive und negative Elektrizität in gleichen Mengen, so daß die Ergiebigkeit der Quellen in Summa Null ist. Eine steigende Dichte positiver oder negativer Elektrizität an der Grenze der Leiter gegen das Dielektrikum würde zu einer Änderung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ führen, die wiederum nach dem Ohmschen Gesetze die Stromverteilung beeinflussen würde und daher bei einem stationären Strome auszuschließen ist.

Das Feld des stationären elektrischen Leitungsstromes ist demnach durchweg quellenfrei. Es ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0 \tag{156}$$

innerhalb des Leiters,

$$\mathfrak{i}_{\nu 1} + \mathfrak{i}_{\nu 2} = 0 \tag{156a}$$

an der Grenze zweier Leiter,

$$\mathfrak{i}_\nu = 0 \tag{156b}$$

an der Grenze gegen den Isolator.

Betrachten wir hingegen den nicht stationären Strom, der einen Kondensator ladet oder entladet, so beginnt oder endigt der Leitungsstrom auf einer der Kondensatorplatten; wo er beginnt, nimmt die wahre Ladung entsprechend ab, wo er endigt, nimmt die wahre Ladung entsprechend zu. Eine Senke des Leitungsstromes würde hiernach eine zeitlich ansteigende

Dichte, eine Quelle des Leitungsstromes eine abnehmende Dichte der wahren Elektrizität ergeben. Nun beginnen aber überall dort, wo wahre Ladung sich befindet, elektrische Verschiebungslinien. Das Integral der elektrischen Verschiebung, erstreckt über eine Fläche, welche eine der Kondensatorplatten einschließt, ist gleich der wahren Ladung der Platte, wie die Grundgleichung (135) besagt. Ist nun J die Stromstärke des auf der Platte endigenden Stromes, so ist nach (151)

$$J = \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_\nu df = \int df \frac{\partial \mathfrak{D}_\nu}{\partial t}.$$

Die Stromstärke des Leitungsstromes, der zur Platte fließt, ist demnach gleich der zeitlichen Zunahme der Zahl der von der Platte ausgehenden Verschiebungslinien. Der Leitungsstrom im Drahte findet seine Fortsetzung in dem „Verschiebungsstrome" im Dielektrikum. Diese Auffassung des Ladungsvorganges, die sich auf die allgemeingültige Beziehung zwischen wahrer Elektrizität und elektrischer Verschiebung stützt, ist für die Maxwellsche Theorie von fundamentaler Bedeutung. Sie gipfelt in dem allgemeinen Prinzip: Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen stellen in einem ruhenden Körpersystem eine geschlossene, quellenfreie Strömung dar.

Dem Vektor $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$, der Richtung und Dichte des Leitungsstromes anzeigt, würde jetzt der Vektor

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

an die Seite treten, der Richtung und Größe des Verschiebungsstromes anzeigt.

Ist der Leitungsstrom nach dem Jouleschen Gesetze von einer Wärmeentwickelung im Leiter begleitet, die $(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{E}) = \sigma \mathfrak{E}^2$ pro Volumeinheit beträgt, so findet im Dielektrikum infolge des Verschiebungsstromes die Energieänderung

$$\mathfrak{E} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{\partial t}$$

pro Volumeinheit statt, und zwar eine Energieansammlung, wenn der Verschiebungsstrom einen spitzen Winkel mit dem schon bestehenden elektrischen Felde bildet, eine Energieabgabe, wenn die beiden Vektoren einen stumpfen Winkel einschließen.

Das Prinzip des geschlossenen Stromes läßt sich am einfachsten formulieren, wenn man sich einen Körper denkt, der sowohl Träger eines Leitungsstromes, als eines Verschiebungsstromes sein kann. Nach der Anschauung Maxwells besitzt jeder Körper eine Leitfähigkeit σ und eine Dielektrizitätskonstante ε. Die Dichte des „wahren" Stromes ist durch den Vektor

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{157}$$

gegeben. Je nachdem das Feld langsamer oder rascher wechselt, wird der betreffende Körper mehr als Leiter oder als Dielektrikum erscheinen; von der Wechselzahl wird es auch abhängen, ob der elektrische Strom im Körper mehr von Wärmeentwickelung oder von umkehrbarer Änderung elektrischer Energie begleitet ist.

Das Prinzip des geschlossenen Stromes besagt nun: der wahre Strom $\mathfrak{c}$ ist durchweg quellenfrei; es ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0 \tag{157a}$$

im Innern eines Körpers,

$$\mathfrak{c}_{\nu 1} + \mathfrak{c}_{\nu 2} = 0 \tag{157b}$$

an der Grenze zweier Körper.

Diese Grundgleichungen sind nach (157) identisch mit den beiden folgenden

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

$$-(\mathfrak{i}_{\nu 1} + \mathfrak{i}_{\nu 2}) = +\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{D}_{\nu 1} + \mathfrak{D}_{\nu 2}) = -\frac{\partial \omega}{\partial t},$$

die besagen: räumliche Divergenz und Flächendivergenz (§ 23) des Leitungsstromes sind bzw. gleich der zeitlichen Abnahme der räumlichen bzw. der Flächendichte der wahren Elektrizität. Sie sprechen mithin in bezug auf die Volumelemente und

Flächenelemente den allgemeinen Satz aus, daß die Menge wahrer Elektrizität in einem ruhenden Körper nur durch einen Leitungsstrom geändert werden kann; sie gelten in einem jeden ruhenden Körpersystem.

Die erste der beiden Gleichungen ergibt für die Dichte der freien Elektrizität $\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$ die Beziehung

$$\sigma \varrho' = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varrho'}{\partial t}$$

oder, wenn

(158) $$\vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

gesetzt wird,

(158a) $$\varrho' = \varrho_0' \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}},$$

wenn ϱ_0' den Wert von ϱ' zur Zeit $t = 0$ angibt. Die Dichte der freien Elektrizität sinkt also innerhalb jedes homogenen Körpers, der sowohl leitend wie dielektrisch ist, mit der Zeit in geometrischer Progression. Die Zeit ϑ, nach der ϱ' auf den e^{-1}ten Teil gesunken ist, ist nach (158) um so kleiner, je größer die Leitfähigkeit des Körpers ist. Sie wird als Relaxationszeit bezeichnet. Für die Metalle ist sie unmeßbar klein, was damit zusammenhängt, daß der Verschiebungsstrom im Metalle auch für die raschesten elektrischen Schwingungen gegen den Leitungsstrom verschwindet. Für reines Wasser aber ist die Leitfähigkeit so gering, daß die Relaxationszeit von der Größenordnung meßbarer Zeiten wird.

§ 49. Der Konvektionsstrom.

Wir haben im vorigen Paragraphen nur von ruhenden Körpern gesprochen. Läßt man Bewegungen der Körper zu, so kann die Elektrizität auch ohne Leitungsstrom bewegt werden. Den Transport der Elektrizität durch bewegte, geladene Körper bezeichnet man als Konvektionsstrom.

Ein elektrisch geladener, isolierter Körper bewege sich etwa im Luftraume oder in einem mit Petroleum gefüllten Gefäße. Irgendwo in dem Medium sei eine geschlossene Fläche

konstruiert. Solange der Körper sich außerhalb der Fläche befindet, ist die gesamte elektrische Verschiebung, die er durch die Fläche sendet, gleich Null; sobald er in die Fläche eingetreten ist, wird die elektrische Verschiebung durch die Fläche hindurch gleich der wahren Elektrizitätsmenge, welche der Körper in das Innere der Fläche eingeführt hat. Es hat also gleichzeitig mit dem Eintritt des Körpers die elektrische Verschiebung sich geändert, es ist ein Verschiebungsstrom durch die Fläche hindurchgetreten. Hier bilden Konvektionsstrom und Verschiebungsstrom zusammen den geschlossenen Strom.

Im allgemeinen Falle werden Leitungsstrom, Konvektionsstrom und Verschiebungsstrom zusammen den geschlossenen Strom ergeben. Die Dichte des Konvektionsstromes ist offenbar

$$\mathfrak{k} = \varrho \cdot \mathfrak{v}, \tag{159}$$

wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des materiellen Volumelementes ist, an dem die Ladung mit der Dichte ϱ haftet. Als Gesamtstromdichte ist, wenn konvektive Bewegungen wahrer Elektrizität stattfinden,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{D} \tag{159a}$$

anzusehen, an Stelle des auf ruhende Körper beschränkten Ausdruckes (157).

Nicht immer ist es möglich, Leitungsstrom und Konvektionsstrom scharf voneinander zu sondern. Betrachten wir z. B. einen Elektrolyt, d. h. einen Körper, der beim Durchgang des Stromes eine chemische Zersetzung erfährt. Für einen solchen Körper gelten die beiden von Faraday entdeckten Gesetze: Die zersetzte Menge des Elektrolyten ist der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge proportional. In verschiedenen Elektrolyten zersetzt ein gegebener Strom in gleichen Zeiten chemisch äquivalente Mengen. Diese beiden Gesetze, die übrigens im Voltameter zur Strommessung verwandt werden, deutet bekanntlich die Elektrochemie folgendermaßen. Es sollen Verbindungen positiver und negativer Elektrizitätsmengen

mit Quantitäten der wägbaren Materie, sogenannte „Ionen“ sein, welche den Strom in Elektrolyten transportieren. Hier kann man im Zweifel sein, ob man es im Sinne der Maxwellschen Theorie mit einem Leitungsstrome oder mit einem Konvektionsstrome zu tun hat. Die für den Leitungsstrom charakteristischen Gesetze von Ohm und Joule gelten auch in Elektrolyten, anderseits soll die Elektrizität bei ihrer Bewegung an wägbare Massen gebunden sein wie bei einem Konvektionsstrome. Die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen Form geht einer Entscheidung dieser Frage aus dem Wege; sie begnügt sich mit der Feststellung, daß die Verknüpfung des Stromes mit der Feldstärke und mit der Wärmeentwickelung hier die gleiche ist wie bei den Metallen und daß es für die Bestimmung des wahren Stromes (159a) nicht darauf ankommt, ob der Transport der Elektrizität in Form des Leitungsstromes oder des Konvektionsstromes erfolgt.

Auch verzichtet die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen, rein phänomenologischen Gestalt darauf, über die molekularen Vorgänge, welche im elektrischen Strome stattfinden, etwas auszusagen. Und doch legen gerade die Faradayschen Gesetze die Hypothese nahe, daß der Elektrizität wie der Materie eine atomistische Struktur zuzuschreiben ist und daß die Ionen Verbindungen chemischer und elektrischer Atome sind, die, der chemischen Valenz entsprechend, sich vereinigt haben. Dieser für die Elektrochemie so fruchtbaren Vorstellung gegenüber nahm die Maxwellsche Theorie zunächst eine neutrale Stellung ein.

Erst der modernen Elektronentheorie gelang es, die atomistische Hypothese für die Weiterbildung der Maxwellschen Theorie zu verwerten. Sie konnte sich dabei insbesondere auf gewisse, den Elektrizitätsdurchgang durch verdünnte Gase begleitende Erscheinungen, die sogenannten „Kathodenstrahlen“ berufen. Diese von der Kathode ausgehenden Strahlen führen negative Elektrizität mit sich; sie besitzen ferner eine gewisse Trägheit, aber eine viel geringere Trägheit als die elektrochemischen Ionen. Die träge Masse der in den

Kathodenstrahlen bewegten elektrischen Partikel beträgt nur ein 2000^{tel} derjenigen Masse, welche man bei der gleichen Ladung dem Wasserstoffion zuschreibt. Das Verhältnis von Ladung und träger Masse, welches den Kathodenstrahlen zukommt, ergab sich als unabhängig von der chemischen Natur der Kathode und der Gasfüllung. Es lag die Annahme nahe, daß man es hier mit den freien Atomen der negativen Elektrizität, den freien „Elektronen" zu tun habe. Diese Hypothese konnte auch von Erscheinungen Rechenschaft geben, welche die von radioaktiven Körpern ausgehenden negativen Elektrizitätsteilchen aufweisen. Es ergaben nämlich die messenden Versuche W. Kaufmanns, daß die träge Masse bei diesen enorm rasch, fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit ansteigt; dieses Ansteigen ließ sich quantitativ dadurch erklären, daß man die träge Masse nur als Konsequenz der elektrischen Ladung der Elektronen auffaßte. Wir werden hierauf ausführlicher erst im zweiten Bande dieses Werkes eingehen. Zunächst interessiert uns das Resultat, daß es Elektrizitätsbewegungen gibt, die man als Konvektionsstrom aufzufassen hat, obwohl sie nicht mit Bewegungen der wägbaren Materie gekoppelt sind. Die Bewegung der Elektronen findet in dem sonst leeren Raume statt, sie hängt nur ab von dem hier herrschenden elektromagnetischen Felde; die Gesetze von Ohm und Joule versagen hier vollkommen.

Die Elektronentheorie geht noch einen Schritt weiter; sie behauptet, daß jeder Leitungsstrom im Grunde ein Konvektionsstrom bewegter Elektronen ist. In Elektrolyten sollen die Elektronen an die ponderablen Atome gebunden sein, in Metallen hingegen, wo chemische Vorgänge den Strom nicht begleiten, sollen sich die Elektronen frei bewegen können. Fließt kein Leitungsstrom durch die Metalle, so sollen die Elektronen in regelloser Bewegung begriffen sein, ähnlich wie die Moleküle eines Gases; der Einfluß äußerer elektrischer Kräfte aber soll bewirken, daß im Mittel mehr Elektronen nach der einen Seite, als nach der anderen wandern. So er-

klärt man das Entstehen eines elektrischen Stromes und insbesondere die Gültigkeit der Gesetze von Ohm und Joule.

Sogar einen Teil des Verschiebungsstromes will die Elektronentheorie auf den Konvektionsstrom bewegter Elektronen zurückführen. Nach (142) ist die Dichte des Verschiebungsstromes

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Der erste Bestandteil, der gleich der zeitlichen Änderung der Polarisation ist und den man passend als „Polarisationsstrom" bezeichnen kann, ist nach § 41 durch die Anwesenheit des Dielektrikums bedingt, während der zweite Bestandteil $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ auch im leeren Raume in Rechnung zu ziehen ist, sobald das elektrische Feld sich zeitlich ändert. Jenen ersten Bestandteil des Verschiebungsstromes nun faßt die Elektronentheorie als Bewegung der im Dielektrikum enthaltenen, durch quasielastische Kräfte an Gleichgewichtslagen gebundenen Elektronen auf. Sie kennt demnach nur zwei Arten des Stromes: Verschiebungsstrom im Äther und Konvektionsstrom der Elektronen. Der Einfluß der ponderablen Materie auf das elektromagnetische Feld soll ausschließlich auf die in der Materie enthaltenen Elektronen zurückzuführen sein.

So fruchtbar nun auch die soeben skizzierte, insbesondere von H. A. Lorentz vertretene Auffassung für die Elektrizitätstheorie geworden ist, so erschien es doch zweckmäßig, in diesem ersten Bande auf dem klassischen Standpunkte von Maxwell und Hertz stehen zu bleiben und erst im zweiten Bande zur Elektronentheorie fortzuschreiten. Das Verhältnis der beiden Theorien ist in mancher Hinsicht mit dem Verhältnis der Thermodynamik und Mechanik einerseits, der Kinetik andererseits zu vergleichen. Wie nur derjenige, der Thermodynamik getrieben hat, die Erfolge der kinetischen Theorie gebührend einzuschätzen weiß, so kann die Elektronentheorie nur gewürdigt werden, wenn man sieht, daß sie zur Erkenntnis neuer, in der Maxwellschen Theorie nicht enthaltener Wahrheiten führt. Und wie die Gastheorie die hypo-

thetischen Moleküle nach den Gesetzen der Mechanik wirklicher Körper behandeln muß, so bestimmt die Dynamik der Elektronen die Felder dieser hypothetischen Teilchen auf Grund derjenigen Gesetze, welche Maxwell für die wirklichen elektrischen Felder aufgestellt hat. Auch hat die Elektronentheorie den Nachweis zu erbringen, daß sie durch Mittelwertsbildung zu den durch die Erfahrung bestätigten Maxwellschen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes zurückgelangt, wie die Gastheorie ihre Hypothesen dadurch rechtfertigt, daß sie die Übereinstimmung ihrer Konsequenzen mit den allgemeinen Gesetzen der Thermodynamik nachzuweisen sucht. Wir legen aus diesen Gründen im ersten Bande dieses Werkes die Maxwellsche Theorie in ihrer ursprünglichen Form der Darstellung zugrunde; nur bei der Erörterung solcher Fragen, bei denen diese Theorie in ihrer ursprünglichen Form versagt, weisen wir kurz auf die Stellung hin, welche die Elektronentheorie zu der betreffenden Frage einnimmt.

§ 50. Die elektromotorischen oder eingeprägten elektrischen Kräfte.

Wir kehren zurück zu dem stationären Strome, der in einer geschlossenen Leitung fließt. Das Ohmsche Gesetz, das in der Form (152) für ein homogenes Stück der Leitung gilt, ergibt für eine geschlossene homogene Leitung $J = 0$, da das wirbelfreie elektrische Feld ein einwertiges Potential besitzt, mithin

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{E}_s \, ds$$

verschwindet, wenn die Punkte P_1, P_2 zusammenfallen. In der Tat lehrt die Erfahrung, daß in einem geschlossenen, physikalisch und chemisch homogenen Leitungskreise kein Strom fließt, es sei denn, daß äußere Einwirkungen stattfinden. Fließt in einem derartigen Kreise ein stationärer Strom, so wird man das Produkt aus Stromstärke J und Gesamtwider-

stand R der Leitung als Maß der äußeren Einwirkungen betrachten. Man schreibt gewöhnlich

$$E = JR \tag{160}$$

und nennt E die elektromotorische Kraft. Besser würde man in dieser verallgemeinerten Fassung des Ohmschen Integralgesetzes E die „elektromotorische Integralkraft" nennen.

Der Begriff der elektromotorischen Kraft entspricht ganz dem Begriffe der „äußeren" oder der „eingeprägten" Kraft in der Mechanik der wägbaren Materie. Man versteht darunter eine Kraft, die nicht durch die Bedingungen, denen das betrachtete System an sich unterworfen ist, mit bestimmt wird, sondern die in willkürlicher Weise mit Hilfe von Mitteln, die in keinem notwendigen Zusammenhange mit dem Systeme stehen, daran angebracht ist. So stehen in einem aus elastischen Körpern aufgebauten Systeme die darin auftretenden Spannungen oder inneren Kräfte in einem gesetzmäßigen Zusammenhange unter sich und mit den Deformationen und Beschleunigungen; äußere Kräfte aber können in ganz willkürlicher Weise daran angebracht werden. Allerdings wirken diese auf die Verteilung der inneren Spannungen bestimmend ein, aber nur in dem Sinne, daß die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, eine Änderung erfahren haben. Die äußeren Kräfte stehen daher den Vorgängen im Systeme in dem Verhältnisse von Ursache und Wirkung gegenüber, ganz ebenso wie die elektromotorische oder eingeprägte elektrische Kraft dem elektrischen Felde und dem Strome eines Leitungskreises.

Die Einführung äußerer oder eingeprägter Kräfte geschieht in der Mechanik zuweilen nur aus dem Grunde, weil man sich auf die Betrachtung eines Teilsystemes beschränkt. Sind in dem obigen Beispiele die äußeren Kräfte durch Lasten gegeben, die wir in beliebiger Verteilung anbringen können, so ist ihre Einwirkung durch die Gesetze der Mechanik bestimmt; sie werden zu inneren Kräften, wenn man das Gravitationsfeld der Erde in das System einbezieht. Dem entspricht auf elektrischem Gebiete diejenige elektromotorische Kraft, welche

man als „induzierte“ bezeichnet. Diese verdankt, wie wir im dritten Abschnitte dieser Schrift darlegen werden, Schwankungen des magnetischen Feldes in der Umgebung eines ruhenden Leitungskreises oder der Bewegung eines Leiters durch ein magnetisches Feld ihren Ursprung. Diese Kräfte stellen sich nur dann als äußere dar, wenn man davon absieht, das magnetische Feld in das System einzubeziehen. Sie werden zu inneren Kräften, deren Wirkungsweise durch die Gesetze der Elektrodynamik bestimmt ist, sobald man das magnetische Feld mit zu dem betrachteten Systeme rechnet. Es ist also Ursprung und Gesetz der induzierten elektromotorischen Kräfte bekannt. Sie werden den eingeprägten Kräften nur dann zugezählt, wenn man den elektrischen Strom bestimmen will, ohne vom magnetischen Felde zu reden.

In anderen Fällen hingegen geschieht die Einführung äußerer Kräfte in der Mechanik aus dem Grunde, weil man es mit Einwirkungen auf das System zu tun hat, die vom Standpunkte der Mechanik aus nicht in zureichender Weise zu erklären sind. Hierher gehören etwa Bewegungen von Magneten, oder von elektrisch geladenen Körpern, oder auch Bewegungen explodierender Körper. Wenn die Mechanik behauptet, alle in der Natur vorkommenden Bewegungen der Körper beschreiben zu können, so behält sie sich stillschweigend vor, solche Bewegungen, die sich rein mechanisch nicht deuten lassen, mit Hilfe eingeprägter Kräfte darzustellen. Diese sind in den genannten Fällen unentbehrlich, bis man das Gesetz der magnetischen und elektrischen Wechselwirkungen bzw. der chemischen Vorgänge bei der Explosion mechanisch gedeutet hat. Solange dies nicht geschehen ist, ist es nicht möglich, die Vorgänge vollständig auf Grund der Gesetze der Mechanik zu verfolgen, weil es eben nicht rein mechanische Vorgänge sind. Die Mechanik behandelt nur eine Seite der Naturvorgänge, und sie versagt, wenn Vorgänge nicht mechanischer Art mitspielen. Sie verdeckt ihre Unkenntnis, indem sie die Einwirkungen anderer physikalischer oder chemischer Prozesse durch eingeprägte Kräfte darstellt.

Die entsprechende Bedeutung hat bisweilen die Einführung eingeprägter Kräfte in der Elektrizitätslehre. Die Kontaktkraft, welche bei der Berührung chemisch verschiedener Körper entsteht, die elektromotorische Kraft in ungleichmäßig konzentrierten elektrolytischen Lösungen, die thermoelektrische Kraft muß man als eingeprägte Kräfte behandeln, weil sie vom Standpunkte der reinen Elektrizitätslehre aus nicht erklärt sind. Hier spielen chemische und thermische Vorgänge mit, deren Gesetz nur in einzelnen Fällen bekannt ist. Wenn man sich auf die Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen beschränkt, muß man hier, wo Vorgänge anderer Art mitspielen, zur Einführung eingeprägter elektromotorischer Kräfte seine Zuflucht nehmen.

Bei der Erregung und Erhaltung elektrischer Felder spielen stets Kräfte nicht elektrischer Art mit. Die positive und negative Elektrizität würden in der Tat ihrem Vereinigungsbestreben folgen und ein jedes elektrische Feld würde bald erlöschen, wenn nicht solche Kräfte mitwirkten. So kommt es, daß gerade die bei der Erregung der Felder stattfindenden Erscheinungen der Reibungselektrizität, des Galvanismus, des permanenten Magnetismus in ihrer Wirkungsweise gar nicht, oder doch nur unvollkommen verstanden sind. Die historische Entwickelung des Elektromagnetismus beginnt mit meist vergeblichen Versuchen, die genannten Erscheinungen aufzuklären. Faraday und Maxwell haben die Gesetze der räumlichen Verteilung und des zeitlichen Verlaufes elektromagnetischer Felder erforscht und der Elektrizitätslehre eine Grundlage gegeben, welche an Sicherheit derjenigen der Mechanik gleichkommt. Die Elektrizitätslehre kann jetzt behaupten, die elektromagnetischen Vorgänge zu beschreiben, mit demselben Rechte, wie die Mechanik behauptet, die Bewegungen der wägbaren Körper zu beschreiben. Die Einwirkung physikalischer oder chemischer Prozesse indessen, welche ihrem Lehrgebäude fremd sind, muß sie, ebenso wie die Mechanik, mit Hilfe eingeprägter Kräfte darstellen. Zu diesen Prozessen gehören naturgemäß gerade diejenigen, die am längsten bekannt sind und die bei der Erregung der Felder stets in Erscheinung treten.

Von dem durch die Erfahrung für ein Stück eines homogenen Leiters gegebenen Ohmschen Integralgesetze (152) gingen wir zu dem auf die Volumelemente bezüglichen Differentialgesetze (153) über; auf chemisch oder thermisch inhomogene Leiter dehnen wir das letztere aus, indem wir setzen

$$\mathfrak{i} = \sigma(\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^e) = \sigma \cdot \mathfrak{E}. \tag{161}$$

Dabei stellt $\mathfrak{E}^e$ die an dem betreffenden Punkte des Leiters infolge seiner chemischen oder thermischen Inhomogenität wirksame eingeprägte oder elektromotorische Kraft dar, $\mathfrak{E}^e$ die früher allein berücksichtigte, durch die Verteilung der freien Ladungen bestimmte „elektrostatische Kraft".

Wir gelangen von diesem verallgemeinerten Ohmschen Differentialgesetze zu dem Integralgesetze (160), welches für einen geschlossenen Kreis gilt, zurück, indem wir (161) über den ganzen Leiter integrieren, wobei dann das längs der geschlossenen Leitlinie erstreckte Integral der elektrostatischen Kraft verschwindet und auf der rechten Seite nur die eingeprägte Integralkraft

$$E^e = \int d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E}^e \tag{161a}$$

übrig bleibt.

§ 51. Die elektrische Kontaktkraft.

Nimmt man den Übergang in der Grenzschicht zweier chemisch verschiedener Leiter als stetig an, so wird die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$, mithin (nach 161) auch die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}^e$ endlich sein, es wird daher das elektrostatische Potential φ der freien Ladungen, dessen Gradient $-\mathfrak{E}^e$ ist, sich stetig verhalten. Geht man indessen zum Grenzfalle einer mathematischen Trennungsfläche über, so wird das von dem ersten Leiter zum zweiten erstreckte Integral von $\mathfrak{E}^e$ einen von Null verschiedenen Wert E_{12} annehmen können; in diesem Falle besteht eine „Kontaktkraft" E_{12} an der Trennungsfläche. Da das vom ersten zum zweiten Leiter erstreckte Integral des stets endlichen Vektors $\mathfrak{i}$ bei jenem Grenzübergange verschwindet, so wird das vom ersten Leiter zum zweiten er-

streckte Integral von $\mathfrak{E}'$, d. h. die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$, entgegengesetzt gleich der Kontaktkraft E_{12} sein; es ist mithin

$$\varphi_2 - \varphi_1 = E_{12} \tag{161b}$$

der elektrostatische Potentialsprung an der Trennungsfläche.

Ein solcher Potentialsprung kann den allgemeinen Gesetzen der Vektorfelder (§ 23) zufolge einer Doppelschicht zugeschrieben werden, und zwar hier einer Doppelschicht freier Elektrizität, deren Sitz die Trennungsfläche der beiden Körper ist. Diese Konsequenz des Auftretens einer Potentialdifferenz ist bereits von Helmholtz gezogen worden. Im Innern der homogenen Leiter ist $\mathfrak{E}' = 0$ und die Leitfähigkeit endlich. Mit Rücksicht auf (156) und (161) ist daher die Dichte der freien Elektrizität, die durch

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}'$$

definiert ist, im Innern homogener Leiter gleich Null sowohl für das elektrische Gleichgewicht, wie auch für den stationären Strom. Das elektrische Feld rührt her von der freien Elektrizität an der Grenze der Leiter gegen den Isolator und von jenen Doppelschichten freier Elektrizität, die sowohl dort, wo zwei Leiter aneinander, als auch dort, wo die Leiter an den Isolator grenzen, ihren Sitz haben können. Dabei wird in Wirklichkeit, da der Übergang zweier in Berührung gebrachter Körper stetig ist, die Doppelschicht nicht strenge realisiert sein, sondern man wird es mit zwei benachbarten Schichten freier Elektrizität zu tun haben, von denen die positive auf dem Körper sitzt, welcher das größere, die negative auf dem Körper, der das kleinere Potential angenommen hat.

Im Falle des elektrischen Gleichgewichtes ist das Feld $\mathfrak{E}'$ und die Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der Leiter bestimmt, wenn die Kontaktkräfte an der Grenze der sich berührenden Körper und dadurch die Potentialdifferenzen je zweier solcher Körper gegeben sind. Im Innern der homogenen Leiter ist $\mathfrak{E}' = 0$, mithin, da $\mathfrak{i} = 0$, auch $\mathfrak{E}' = 0$. Folglich befindet sich an der Grenze zweier solcher Leiter im ganzen keine freie Elektrizität, da ja der

Sprung der Normalkomponente von $\mathfrak{E}'$ Null ist. Hier hat nur die Doppelschicht ihren Sitz, deren Moment durch den Sprung von φ bestimmt ist und die ebensoviel freie Elektrizität positiven wie negativen Vorzeichens enthält.

Durchfließt hingegen ein Strom die Trennungsfläche zweier Leiter, so wird $\mathfrak{E}'$ im Innern der homogenen Leiter von Null verschieden, nämlich gleich

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \mathfrak{i}.$$

Auch ist an der Trennungsfläche zweier Leiter die Normalkomponente von $\mathfrak{i}$ nach (156a) stetig, aber σ ist im allgemeinen unstetig, so daß hier sehr wohl eine Flächendivergenz von $\mathfrak{E}'$, d. h. freie Elektrizität positiven oder negativen Vorzeichens auftreten kann. Alsdann sitzt auf der Trennungsfläche der beiden Leiter außer der Doppelschicht noch eine einfache Belegung freier Elektrizität; dazu kommen ferner einfache und wahrscheinlich auch Doppelschichten an der Grenzfläche gegen den Isolator.

Alles dieses sind nur mathematische Folgerungen aus den Beziehungen (161), (161b), die durchaus nicht darüber aufklären, durch welche Umstände die bei thermischer oder chemischer Inhomogenität auftretenden elektromotorischen Kräfte bedingt sind. Ja sie geben nicht einmal darüber Auskunft, welcher Strom den in Berührung gebrachten Oberflächen der Leiter bei der Bildung der Doppelschicht zufließt. Denn es war bisher nur von der freien Elektrizität die Rede, die von der Divergenz des Vektors $\mathfrak{E}'$ abhängt, der Strom aber ist mit Ansammlung wahrer Elektrizität verbunden, die durch div $\mathfrak{D}$ gegeben wird. Bevor wir zur Erörterung dieser Frage übergehen, wollen wir nur kurz die Heavisidesche Auffassung der Kontaktkraft zur Sprache bringen. Man findet dieselbe in O. Heavisides Electrical Papers Bd. I. 1892. S. 348 u. f. ausführlich behandelt.

In der allgemeinen Theorie der Vektorfelder (§ 29) sahen wir, daß eine Doppelschicht von Quellen in dem umgebenden Raume die gleiche Strömung erzeugt, wie eine auf der Rand-

kurve der Doppelschicht befindliche Wirbellinie. Wir können daher das Feld $\mathfrak{E}'$ anstatt es als wirbelfrei anzusehen und Doppelschichten anzunehmen, auf das Vorhandensein einer Wirbellinie zurückführen als Randkurve der früher angenommenen Doppelschicht. Das ist um so eher gestattet, als unsere Beobachtungen sich nicht auf das Innere der beiden Leiter beziehen. Es mag z. B. die Lötstelle eines Zink-Kupferstabes betrachtet werden. Aus der Erfahrung ist in der Tat nur dies bekannt, daß sich außerhalb des Zink-Kupferkörpers ein elektrostatisches Feld ausbildet. Dazu kommt, daß nach dem, was wir über die Eigenschaften der homogenen Leiter wissen, überall im Innern derselben im Gleichgewichtsfalle $\mathfrak{E}'$ verschwindet. Was aber das gesamte Feld $\mathfrak{E}'$ im Innern der Metalle und in der Luft anbelangt, so kann dasselbe nach § 29 mit demselben Rechte, wie einer Doppelschicht freier Ladungen auf der Trennungsfläche Zink-Kupfer auch einem Wirbel von entsprechendem Momente auf der Linie zugeschrieben werden, längs deren Zink, Kupfer und Luft zusammenstoßen. Das Vorhandensein eines solchen Wirbels behauptet nun die Theorie von Heaviside. Sie nimmt an, daß ein magnetischer Strom längs jener Linie zirkuliert; es bedingt nämlich, wie wir später sehen werden, ein magnetischer Strom einen Curl der elektrischen Feldstärke. Es soll aber durchaus nicht behauptet werden, daß hier wirklich ein solcher Strom zirkuliert, sondern nur, daß die Ausgangsstelle für das Feld in einer Wirbellinie zu suchen ist, und das ist in der Tat eine zulässige Vorstellung. Wünscht man sie weiter auszuführen, so wird man annehmen, daß durch Wirkungen, über die wir zunächst keine Rechenschaft zu geben vermögen, jedenfalls aber infolge des Zusammentreffens der drei Medien (Zink, Kupfer, Luft) an dieser Stelle ein Curl der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}'$ hervorgerufen wird. Überall sonst ist $\mathfrak{E}'$ quellenfrei und wirbelfrei. Dazu tritt nun ein elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}'$ derart, daß im Innern der beiden Metalle und auch in der Lötstelle

$$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}' = 0$$

wird, sobald elektrostatisches Gleichgewicht sich hergestellt hat. Es ist also auch $\mathfrak{E}'$ im Innern der Metalle und an der Lötstelle quellenfrei, freie Ladungen sitzen nur auf den an die Luft angrenzenden Oberflächen des Zinkes und des Kupfers. Das Feld $\mathfrak{E}'$ ist, im Gegensatze zu demjenigen von $\mathfrak{E}'$, durchweg wirbelfrei.

Zwischen den Theorien von Helmholtz und Heaviside experimentell zu entscheiden, dürfte kaum möglich sein, da beide bezüglich des zu beobachtenden Feldes zu denselben Resultaten führen. Es ist ja überhaupt das Problem, ob die Kontaktpotentialdifferenz wirklich auf der Trennungsfläche Zink-Kupfer ihren Sitz hat, durchaus nicht gelöst. Einige Forscher neigen sogar der Ansicht zu, daß der Sitz der Kontaktkraft ausschließlich in den an die Luft angrenzenden Oberflächen der Metalle zu suchen ist. Es ist daher jedenfalls sehr bemerkenswert, daß es eine Theorie gibt, welche jene Frage überhaupt nicht aufwirft, indem sie das Zusammentreffen dreier chemisch differenter Körper als notwendig zur Erregung einer Kontaktkraft ansieht.

Bekanntlich genügen die Kontaktkräfte an der Grenze von Leitern erster Klasse, wenn sie überhaupt existieren, dem Gesetz der Spannungsreihe

(161 c) $$E_{12} + E_{23} + E_{31} = 0.$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß in einem aus drei thermisch und chemisch homogenen Leitern erster Klasse zusammengesetzten Leitungskreise kein stationärer Strom fließt.

Wird aber einer der Leiter erster Klasse durch einen elektrolytischen Leiter ersetzt, so ist eine elektromotorische Kraft, im allgemeinen von der Größenordnung eines Volt, in dem Kreise vorhanden. An der Grenzfläche eines Metalles und eines Elektrolyten ist also jedenfalls eine Kontaktkraft anzunehmen. Die Energie, auf deren Kosten der elektrische Strom entsteht, ist hier chemischen Ursprungs. In gewissen Fällen, z. B. für ein Metall, das in eine verdünnte Lösung eines seiner Salze taucht, kann man den beim Stromdurchgang stattfindenden chemischen Prozeß auf Grund der osmotischen

Theorie verfolgen und so die Kontaktkraft theoretisch bestimmen.

Was nun die Frage anbelangt, welches das Feld der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in der Übergangsschicht zweier Leiter ist und welches die entsprechende Verteilung wahrer Elektrizität, so ist dieselbe bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse kaum zu beantworten. Nimmt man an, daß $\mathfrak{D}$ durch die resultierende Feldstärke

$$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e = \mathfrak{E}$$

bestimmt ist, so kann $\mathfrak{D}$ freilich berechnet werden, wenn die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Körpers bekannt ist. Für elektrolytische Lösungen ist als Dielektrizitätskonstante diejenige des Lösungsmittels zu betrachten, also für wässerige Lösungen diejenige des reinen Wassers. Die Frage nach der Dielektrizitätskonstante der Metalle hingegen ist noch ganz offen. Wenn es gestattet wäre anzunehmen, daß die Metalle gar nicht elektrisch polarisierbar seien, d. h. daß der Vektor $\mathfrak{P}$ hier verschwindet, so wäre $\varepsilon = 1$ und die Doppelschicht freier Elektrizität wäre zugleich eine Doppelschicht wahrer Elektrizität. Diese Annahme ist indessen durchaus hypothetisch, und so müssen wir darauf verzichten, über die wahre Elektrizität, die sich an der Oberfläche eines Metalles bei der Berührung mit einem anderen Leiter ansammelt, etwas auszusagen.

§ 52. Räumlich verteilte elektromotorische Kräfte.

Der Kontaktkraft, die an der Grenze zweier chemisch verschiedener Körper ihren Sitz hat, steht die räumlich verteilte eingeprägte Kraft gegenüber, die in chemisch oder thermisch inhomogenen Körpern ihren Sitz hat. Sie hängt ab von der Art, wie die chemische Zusammensetzung bzw. die Temperatur, von Punkt zu Punkt variiert. Diese eingeprägten Kräfte kennt man am besten für verdünnte elektrolytische Lösungen, in denen man die Vorgänge auf Grund der elektrolytischen Dissoziationstheorie verfolgen kann. Hier ruft die resultierende Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^e$$

sowohl einen Leitungsstrom, wie einen Verschiebungsstrom hervor. Im Gleichgewichtsfalle muß im Innern des Leiters $\mathfrak{E}$ gleich Null sein, so daß gleichzeitig mit dem Leitungsstrome auch die elektrische Verschiebung im Innern des Leiters verschwindet. Dabei ist aber unter $\mathfrak{E}$ der Durchschnittswert der Feldstärke für ein Raumelement zu verstehen, welches eine große Zahl von Ionen enthält. In molekularen Bezirken bestehen auch im Gleichgewichtsfalle die von den Ionen ausgehenden Kraftlinien und Verschiebungslinien, doch ist das Feld hier stetem Wechsel unterworfen, so daß im Durchschnitt keine Richtung im Raume bevorzugt ist und daß bei der Mittelwertsbildung $\mathfrak{E}$ verschwindet. Damit dies der Fall ist, muß freie Elektrizität sich in der Weise ansammeln, daß die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}'$ der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}'$ das Gleichgewicht hält. Die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}'$ ist dabei die osmotische Kraft, welche die Konzentration der Lösung auszugleichen sucht; diese wirkt auf die Atome der wägbaren Materie und daher auch auf die mit jenen verkoppelten positiven und negativen Elektrizitäten. Sie wirkt auf die positiven und die negativen Ionen in gleichem Sinne, indem sie dieselben von Stellen größerer zu Stellen geringerer Konzentration treibt. Die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}'$ hingegen treibt die negativen Ionen in entgegengesetzter Richtung wie die positiven. Die Bedingung der Stromlosigkeit gestattet es, wie W. Nernst zeigte, die elektromotorische Kraft in einer Lösung eines Elektrolyten von wechselnder Konzentration aus den Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen zu berechnen. Diese räumlichen elektromotorischen Kräfte, deren Bestehen mit einer Diffusion des Elektrolyten verbunden sind, sind viel kleiner als die flächenhaften Kontaktkräfte, die an der Grenze eines Metalles und einer elektrolytischen Lösung wirken.

Von weit geringerem Betrage als die im vorigen Paragraphen besprochenen Kontaktkräfte sind auch diejenigen eingeprägten Kräfte, die man als thermoelektrische bezeichnet. Dieselben treten auf in einem aus zwei Metallen bestehenden geschlossenen Stromkreise, wenn die beiden Lötstellen ver-

schiedene Temperaturen besitzen. Da der Strom hier keinen Transport wägbarer Materie, mithin auch keinen chemischen Prozeß begleitet, so entsteht die Frage nach der Energiequelle, welche die elektromotorische Kraft verursacht. Diese Frage wird gelöst durch das Peltiersche Phänomen. Der Strom kühlt die wärmere Lötstelle ab, er erwärmt die kältere; die Differenz der beim Durchgange der Elektrizitätsmenge 1 den Lötstellen zugeführten bzw. entzogenen Wärmemengen Q_1, Q_2 ist im Sinne des ersten Hauptsatzes der Arbeit der thermoelektrischen Kräfte äquivalent. Ein in entgegengesetzter Richtung fließender, durch sonstige elektromotorische Kräfte unterhaltener Strom würde umgekehrt Arbeit gegen die thermoelektrischen Kräfte leisten, so daß beim Durchgange der Elektrizitätsmenge 1 die Wärme Q_2 der kälteren Lötstelle entzogen und Q_1 der wärmeren Lötstelle zugeführt wird. Wir haben also hier thermische Vorgänge, die, im Gegensatz zur Jouleschen Wärmeentwickelung, umkehrbar verlaufen. Die dabei auftretenden thermoelektrischen Kräfte scheinen zunächst flächenhaft verteilt zu sein; es zeigt jedoch die genauere Untersuchung, daß es nicht gelingt, auf Grund dieser Voraussetzung die Tatsachen befriedigend darzustellen.

Wendet man nämlich auf jene umkehrbare, zwischen den Temperaturen T_1, T_2 der Lötstellen arbeitende kalorische Maschine den zweiten Hauptsatz an, so erhält man

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{T_1 - T_2}.$$

Hiernach müßte der Peltier-Effekt der absoluten Temperatur der Lötstelle proportional sein und es müßte die elektromotorische Kraft des Thermoelementes

$$E^e = Q_1 - Q_2 = (T_1 - T_2)\frac{Q_2}{T_2},$$

d. h. bei konstant gehaltener Temperatur der kälteren Lötstelle der Differenz der Temperaturen der beiden Lötstellen proportional sein. Diese Folgerung wird durch die Erfahrung keineswegs bestätigt; es gibt im Gegenteil Thermoelemente,

deren elektromotorische Kraft bei Erwärmung der heißeren Lötstelle nicht wächst, sondern abnimmt.

Dies führte W. Thomson zu dem Schlusse, daß in einem Thermoelemente außer den flächenhaften elektromotorischen Kräften an der Grenze der beiden Metalle noch räumliche Kräfte im Innern der Metalle wirksam sind überall dort, wo ein Temperaturgefälle vorhanden ist. Hier findet, dem Peltiereffekte entsprechend, der sogenannte Thomsoneffekt statt, eine umkehrbare thermische Wirkung. Man kann den Vorgang so auffassen, daß in einem chemisch homogenen Metalle infolge eines Temperaturgefälles eingeprägte elektrische Kräfte auftreten. Diese in beiden Metallen wirksamen räumlich verteilten Kräfte, zusammen mit den flächenhaften elektromotorischen Kräften der Lötstellen, ergeben die resultierende elektromotorische Kraft; der entstehende Strom ist begleitet von einem thermischen Prozeß, der bei Umkehrung der Stromrichtung in entgegengesetztem Sinne verlaufen würde.

Die Analogie der in elektrolytischen Lösungen infolge des Konzentrationsgefälles und in Metallen infolge des Temperaturgefälles auftretenden elektromotorischen Kräfte legt es nahe, hier über den Mechanismus ähnliche Vorstellungen zu entwickeln wie dort. Das versuchen in der Tat die von E. Riecke und P. Drude herrührenden neueren Elektronentheorien der Metalle, von denen bereits (§ 49) die Rede war. Die Konzentration der freien Elektronen soll in verschiedenen Metallen verschieden und in jedem Metall Temperaturfunktion sein, so daß chemische und thermische Differenzen ein Konzentrationsgefälle und so eine eingeprägte elektrische Kraft $\mathfrak{E}'$ hervorrufen. Anderseits sollen die freien Elektronen im Sinne der kinetischen Gastheorie Anteil an der Wärmebewegung haben, so daß ihr Transport im elektrischen Strome von einem Wärmestrom begleitet ist. Diese Vorstellung erklärt übrigens auch die merkwürdigen Beziehungen, welche zwischen der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit der Metalle bestehen. Es ist zu hoffen, daß die weitere Verfolgung der Elektronenhypothese auch sonst für die Theorie der Metalle

fruchtbar sein wird; sie liegt indessen jenseits des Zieles, das sich der vorliegende Band gesteckt hat.

Das gleiche gilt von den räumlich verteilten eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}'$, welche man heranzuziehen hat, um die Erscheinungen der Pyroelektrizität und Piezoelektrizität darzustellen. Diese in gewissen Kristallen bei Erwärmung bzw. Druck auftretenden Kräfte bestimmen zusammen mit der elektrostatischen Kraft der freien Ladungen hier keinen Leitungsstrom, sondern eine elektrische Verschiebung. Es mag beiläufig bemerkt werden, daß die Symmetrie der Kristalle, welche die genannten Erscheinungen aufweisen, im Einklange sind mit den Folgerungen, die man auf Grund kristallphysikalischer Prinzipien aus der polaren Art des elektrischen Vektors gezogen hat.

§ 53. Die Maßeinheiten und Dimensionen der elektrischen Größen.

Die bisherigen Entwickelungen sind noch unabhängig davon, wie man die Maßeinheiten für die in ihnen vorkommenden Größen wählen will. Das geschieht in der Tat in den verschiedenen elektrischen und magnetischen Maßsystemen in verschiedener Weise. Alle bisher aufgestellten Systeme aber beruhen auf dem Zentimeter-Gramm-Sekunde-System (C.-G.-S.) der Mechanik; die Krafteinheit ist also stets die Dyne, die Einheit der Energie das Erg. Bestimmen zwei elektrische Größen eine Kraftgröße oder eine Energiegröße, so ist durch Festlegung der Maßeinheit der einen elektrischen Größe auch die Einheit der anderen festgelegt. So wiesen wir bereits zu Beginn dieses Abschnittes (in § 33) darauf hin, daß die Gleichung (124), welche das Produkt aus wahrer Ladung e und Feldstärke $\mathfrak{E}$ einer Kraft gleichsetzt, nur die Wahl der Einheit der Ladung frei läßt; hat man über diese verfügt, so ist die Einheit von $\mathfrak{E}$ bestimmt. Aus (127) folgt dann die Einheit, in der das Potential φ, aus (137a) diejenige, in der die räumliche Dichte ϱ' der freien Elektrizität zu messen ist. Anderseits sind unmittelbar aus der für die wahre Ladung gewählten Einheit die Einheiten von $\mathfrak{D}$ durch (135), von J, $\mathfrak{i}$ durch

(151), (152a) bestimmt. Ferner sind durch (134), (152) Kapazität K und Gesamtwiderstand R als Quotienten aus wahrer Ladung und Potentialdifferenz bzw. aus Potentialdifferenz und Stromstärke definiert und durch (136), (153) die Materialkonstanten ε, σ.

Vom atomistischen Standpunkte aus würde es sich empfehlen, einem Vorschlage J. J. Thomsons gemäß, als Einheit der wahren Ladung diejenige zu wählen, welche ein einwertiges Ion oder ein Elektron mit sich führt. Dabei könnte die Entscheidung darüber, ob die Einheit der Elektrizität auf die mechanischen Grundeinheiten von Länge, Masse und Zeit oder ob umgekehrt die Masse auf die Grundeinheiten von Länge, Zeit und Elektrizität zurückgeführt werden soll, zunächst offen bleiben. Solange man von der Vorstellung ausging, daß alle Naturvorgänge im Grunde Bewegungen träger Massen sind, pflegte man die mechanischen Grundeinheiten ausschließlich in Betracht zu ziehen und die Aufklärung über die wahre mechanische Einheit von e von der Erkenntnis der verborgenen Bewegungen zu erwarten, die sich als elektromagnetisches Feld kundgeben sollten. Heute ist jene mechanische Naturanschauung nicht mehr die allein herrschende. Die moderne Physik neigt vielmehr der Anschauung zu, daß alle Naturerscheinungen in letzter Linie auf elektromagnetische Vorgänge, etwa Elektronenbewegungen, zurückzuführen sind. Dieser elektromagnetischen Naturanschauung würde sich ein Einheitssystem anpassen, welches auf die Grundeinheiten der Länge, Elektrizität und Zeit begründet ist. Die Einheit der trägen Masse würde auf diese Grundeinheiten leicht zurückzuführen sein, etwa mit Hilfe der für die Masse der Elektronen gültigen Formeln. Dem Grundgedanken dieses Systemes würde am besten die Wahl der Elektronenladung als Einheit der Elektrizität entsprechen; praktisch ist diese Wahl allerdings nicht möglich, da wir diese Einheit nicht mit genügender Genauigkeit festzulegen imstande sind.

Man kann nun an Stelle der Einheit der wahren Ladung e die Einheit der Dielektrizitätskonstanten ε offen lassen; diese

beiden Größen sind miteinander durch das Coulombsche Gesetz (148a) verknüpft. Die verschiedenen Maßsysteme der elektrischen Größen werden sich also durch die für ε gewählte Einheit charakterisieren lassen.

Das „elektrostatische Maßsystem" betrachtet ε als reine Zahl, die für den leeren Raum gleich 1 gesetzt wird. Dieses System kann sich darauf berufen, daß im leeren Raume die Unterscheidung wahrer und freier Ladungen nicht notwendig ist; in der Tat haben wir im ersten Kapitel dieses Abschnittes, welches das Feld im Luftraume behandelte, nur von Elektrizität schlechtweg gesprochen. Die Unterscheidung von wahrer und freier Ladung, von Feldstärke und elektrischer Verschiebung wurde erst bei der Einführung dielektrischer Körper notwendig. Vom Standpunkte der Elektronentheorie, welche jedes Feld als Feld im Äther, jeden Strom entweder als Konvektionsstrom der Elektronen oder als Verschiebungsstrom im Äther betrachtet, erscheint es naturgemäß, wahre und freie Ladung durch dieselbe Einheit zu messen. Diese Einheit ist im elektrostatischen Systeme definiert als diejenige Ladung, welche eine ihr gleiche im Vakuum im Abstande von 1 cm mit der Kraft einer Dyne abstößt.

Wünscht man indessen in den auf beliebige Dielektrika bezüglichen Gleichungen den Unterschied von wahren und freien Ladungen kenntlich zu machen, so wird man es vorziehen, Einheit und Dimension von ε zunächst unbestimmt zu lassen und alle anderen Einheiten auf die drei Grundeinheiten der Länge, Masse, Zeit und Dielektrizitätskonstanten zu beziehen. Die Dimensionen von wahrer Ladung e und freier Ladung e' sind dann dadurch bestimmt, daß im Ausdrucke (148a) des Coulombschen Gesetzes beiderseits Größen von der Dimension einer Kraft stehen müssen. Die Dimension der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ folgt als Quotient von wahrer Ladung und Fläche, diejenige der Feldstärke $\mathfrak{E}$ als Quotient von freier Ladung und Fläche, das Potential φ und die elektromotorische Kraft E sind Produkte von $\mathfrak{E}$ und Längen. Die Stromstärke J ferner ist ein Quotient aus wahrer Ladung und Zeit, die Strom-

dichte $\mathfrak{i}$ ein Quotient aus Stromstärke und Fläche. Die Dimension von σ endlich folgt nach (153) als Quotient von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ oder nach (158) als Quotient von ε und einer Zeitgröße. Wir stellen alle Dimensionen in der folgenden Tabelle zusammen:

Dimensionen der elektrischen Größen.

Energie	$M\ L^2\ T^{-2}$,
Ponderomotorische Kraft . . .	$M\ L\ T^{-2}$,
Wahre Elektrizitätsmenge e . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}\ T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Freie Elektrizitätsmenge e' . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}\ T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ . . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Potential der freien Elektrizität φ	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}\ T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$,
Elektrostatische Kapazität K . .	$L \cdot \varepsilon$,
Stromstärke J	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}\ T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Stromdichte $\mathfrak{i}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$,
Spezifische Leitfähigkeit σ . . .	$T^{-1} \cdot \varepsilon$,
Elektrischer Widerstand R . .	$L^{-1}\ T\ \varepsilon^{-1}$.

Streicht man in dieser Liste überall ε fort, so gelangt man zu den Dimensionen des elektrostatischen Maßsystemes, welches die elektrischen Einheiten durch die Einheiten der Masse, Länge und Zeit ausdrückt. Umgekehrt kann man die Masseneinheit durch die Einheiten der Elektrizität, Länge und Zeit folgendermaßen ausdrücken

$$e^2 L^{-3} T^2;$$

die Einführung dieses Ausdruckes für M würde aus allen Dimensionsformeln die gebrochenen Exponenten fortschaffen, wobei ε ebenso wie im elektrostatischen Systeme als reine Zahl betrachtet werden würde.

Dritter Abschnitt.

Das elektromagnetische Feld.

Erstes Kapitel.

Die magnetischen Vektoren.

§ 54. Die Analogie der elektrischen und der magnetischen Größen.

Schon die Vertreter der Fernwirkungstheorie bemerkten, daß die Elektrostatik und die Magnetostatik vielfach Analogien aufweisen und bisweilen eine durchaus übereinstimmende mathematische Behandlung gestatten. O. Heaviside, H. Hertz und E. Cohn haben sich bei ihrer Darstellung der Maxwellschen Theorie gleichfalls von der Analogie der elektrischen und der magnetischen Größen leiten lassen, sie haben den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes eine Form gegeben, welche diese an das Dualitätsgesetz der Geometrie erinnernde Beziehung deutlich hervortreten läßt. Dabei wird der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ die „magnetische Feldstärke“ $\mathfrak{H}$ gegenübergestellt, während die „magnetische Induktion“ $\mathfrak{B}$ der mit 4π multiplizierten elektrischen Verschiebung $4\pi\mathfrak{D}$ gegenübergestellt wird. Demgemäß entspricht der räumlichen Dichte

$$\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{D}$$

der wahren Elektrizität die Dichte

$$\varrho_m = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{B}$$

des „wahren Magnetismus“, der räumlichen Dichte der freien Elektrizität

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$$

entspricht die Dichte

$$\varrho_m' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H}$$

des „freien Magnetismus". Der Dielektrizitätskonstanten ε entspricht die „magnetische Permeabilität" μ, welche, durch die Gleichung $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ definiert, das magnetische Verhalten des betreffenden isotropen Körpers kennzeichnet. Diese Analogie führt zu einem Ausdrucke für die Energie des magnetischen Feldes. Die im Volumelemente dv des elektrischen Feldes enthaltene Energie war

$$dU = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D})\, dv.$$

Diesem Ausdrucke der elektrischen Energie würde der Ausdruck

$$dT = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\, dv$$

für die im Volumelemente dv enthaltene magnetische Energie entsprechen. Die Integration über den unendlichen Raum ergibt

$$T = \int dv \cdot \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) \tag{162}$$

als Energie des magnetischen Feldes.

So nützlich es nun bisweilen ist, die soeben skizzierte Analogie zu verfolgen, so darf doch nicht verschwiegen werden, daß manche wesentliche Unterschiede zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen bestehen. Zunächst lehrt die Erfahrung, daß es nicht möglich ist, ein Quantum von positivem oder negativem wahren Magnetismus zu isolieren. In jedem Körper ist der gesamte Magnetismus gleich Null und ebenso in jedem Volumelemente eines Körpers. Wahrer Magnetismus kommt in der Natur überhaupt nicht vor. Das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ ist demnach stets ein quellenfreies Feld, der magnetische Induktionsfluß durch eine jede geschlossene Fläche ist stets gleich Null.

Mit dem Fehlen des magnetischen Gegenstückes der wahren Elektrizität ist das Fehlen magnetischer Leiter eng verknüpft.

Das wären, gemäß der elektrischen Analogie, solche Körper, in denen das Bestehen eines magnetischen Feldes von dauernder Wärmeentwickelung begleitet ist. Solche magnetischen Leiter gibt es in der Natur nicht. Es entfällt daher auch der Begriff der magnetischen Leitungsfähigkeit.

Die magnetische Permeabilität μ entspricht insofern ihrem elektrischen Gegenstücke, der Dielektrizitätskonstanten, als sie ebenfalls einem und demselben Grenzwerte zustrebt, wenn man ein mit einem beliebigen Gase gefülltes Gefäß evakuiert. Den Grenzwert bezeichnet man als Permeabilität des leeren Raumes oder des „Äthers". Die Nahewirkungstheorie sieht auch den leeren Raum als Sitz eines magnetischen Feldes, als Speicher magnetischer Energie an. Es liegt nahe, den leeren Raum gewissermaßen als Normalsubstanz zu wählen und den Zahlwert seiner Permeabilität gleich 1 zu setzen, ebenso wie wir die Dielektrizitätskonstante des Äthers gleich 1 setzten (§ 38).

Bezieht man die Permeabilitäten der Körper auf diese Einheit, so tritt wiederum eine Lücke der elektrisch-magnetischen Analogie zutage. Neben den paramagnetischen Körpern, deren Permeabilität größer als 1 ist, die mithin den dielektrischen Körpern entsprechen, gibt es andere, deren Permeabilität etwas geringer als 1 ist, die diamagnetischen Körper. Ferner ist das Verhalten der ferromagnetischen Metalle bemerkenswert, deren Permeabilität nicht nur sehr groß ist — bei weichem Schmiedeeisen unter Umständen einige tausendmal so groß, als für das Vakuum —, sondern für ein und dasselbe Material sich in sehr weiten Grenzen zu ändern vermag. Die ferromagnetischen Körper zeigen außerdem bei geeigneter Behandlungsweise die eigentümliche Erscheinung des remanenten Magnetismus, welche der Theorie noch heute bedeutende Schwierigkeiten bietet, obwohl sie zuerst zur Entdeckung der magnetischen Felder geführt hat.

Setzt demnach die unmittelbare Erfahrung der Verfolgung der elektrisch-magnetischen Analogie gewisse Grenzen, so hat die Weiterbildung der Maxwellschen Theorie im letzten Jahrzehnt Wege eingeschlagen, die dazu geführt haben, die Be-

ziehung der elektrischen und magnetischen Größen von einem anderen Standpunkte aus zu betrachten.

Wie wir sahen, wirkt das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ auf einen ruhenden, elektrisch geladenen Probekörper. Die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ hat ihre Quelle in der ruhenden Elektrizität. Der elektrische Strom hingegen erregt ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$, und die Erregung eines solchen ist mit induktiven Wirkungen in elektrischen Stromkreisen verknüpft, Wirkungen, für die der Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion maßgebend ist. Auf diese wohlerforschten Beziehungen zu den elektrischen Strömen wollen wir die Theorie der magnetischen Felder gründen. Die noch sehr unvollkommene Theorie des permanenten Magnetismus tritt dabei in den Hintergrund und wird erst im vierten Abschnitte behandelt werden.

Die Voranstellung der magnetischen Felder elektrischer Ströme entspricht einem Gedanken, der von Ampère zuerst ausgesprochen ist und der von der Elektronentheorie jetzt wieder aufgenommen wird, nämlich alle magnetischen Felder als durch Elektrizitätsbewegungen erregt anzusehen. Es schien dem Herausgeber der zweiten Auflage dieses Bandes erwünscht, der Einführung in die Maxwellsche Theorie eine Fassung zu geben, in die sich diese Vorstellungen ungezwungen einfügen lassen.

§ 55. Die magnetische Induktion.

Zur Untersuchung eines magnetischen Feldes bedienen wir uns einer Probespule; wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß dieselbe nur aus einer einzigen Drahtwindung besteht, daß die Leitlinie des Drahtes eine geschlossene ebene Kurve ist und daß die Abmessungen des umschlossenen Flächenstückes f groß gegen den Radius des Drahtquerschnittes sind. Wir denken uns die Spule an einem Orte befindlich, an dem anfangs kein magnetisches Feld vorhanden war. Nun erregen wir ein solches Feld, etwa durch Heranbringen eines Magneten oder eines elektrischen Stromes, oder auch durch Schließen eines Stromes in einer benachbarten Leitung. Alsdann beginnt in der Probespule ein Strom J zu fließen. Ohne uns nun

um den zeitlichen Verlauf dieses Stromes zu kümmern, warten wir, bis $J = 0$ geworden ist; alsdann bestimmen wir etwa mit Hilfe eines Voltameters die Elektrizitätsmenge e, welche im ganzen bei Erregung des weiterhin konstant zu haltenden Magnetfeldes die Spule durchflossen hat.

Wir denken uns den Gesamtwiderstand R der Spule gegeben, ebenso den Flächeninhalt f des umschlossenen ebenen Flächenstückes. Wir ordnen ferner dem Sinne, in dem die Elektrizität die Spule durchströmt hat, mit Hilfe einer Rechtsschraube eine zu f senkrechte Richtung ν zu.

Die Gleichung

$$-\mathfrak{B}_\nu = c \cdot \frac{R \cdot e}{f}, \tag{163}$$

in der c einen von den Maßeinheiten abhängigen universellen Faktor bedeutet, definiert die nach der Richtung ν genommene Komponente eines Vektors $\mathfrak{B}$. Diesen Vektor bezeichnen wir als die „magnetische Induktion" des erregten stationären Magnetfeldes. Diese Definition gilt selbstverständlich strenge nur für homogene Felder; für inhomogene Felder ergibt die rechte Seite von (163) nur einen über die Fläche f genommenen Mittelwert von $\mathfrak{B}_\nu$; wir müssen demnach, um die Definition aufrecht zu erhalten, eine Einschränkung hinzufügen; es sind die Abmessungen der Spulenfläche f so klein zu wählen, daß das magnetische Feld auf ihr als merklich homogen anzusehen ist.

Eine ähnliche Einschränkung bezüglich der Abmessungen des Probekörpers mußten wir in Kauf nehmen, als wir die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit Hilfe einer elektrisch geladenen Probekugel definierten. Eine Einsicht in die Gesetze der ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes, die jener Definition zugrunde lagen, ergab sich erst im Laufe der weiteren Betrachtungen. Ebenso müssen wir hier die genauere Erörterung der Gesetze der induzierten Ströme, auf denen die Gleichung (163) beruht, einem späteren Kapitel vorbehalten (Kap. 2, § 65).

Wir haben hier eine Folgerung des Faradayschen Induktionsgesetzes zur Definition des Vektors $\mathfrak{B}$ herangezogen. Wir

wollen jetzt die Betrachtung auf beliebige geschlossene lineare Leiter ausdehnen. Die Elektrizitätsmenge, welche einen solchen Leiter beim Erregen des Magnetfeldes durchläßt, wird nach dem Induktionsgesetze durch die Gleichung gegeben

$$-\int df \cdot \mathfrak{B}_n = c \cdot R \cdot e. \tag{164}$$

Gemäß der zugrunde gelegten Definition des Vektors $\mathfrak{B}$ sagt diese Gleichung folgendes aus: Man nehme irgend eine, von dem linearen Leiter begrenzte Fläche, zerlege diese in kleine Flächenstücke df, auf denen das magnetische Feld als merklich homogen zu betrachten ist, denke sich diese Flächenstücke von Probespulen von gegebenem Widerstande begrenzt und summiere nach Festlegung eines bestimmten Umlaufssinnes die Produkte aus dem Widerstande der betreffenden Probespule und der bei Erregung des Feldes hindurchströmenden Elektrizitätsmenge. Die Summe dieser Produkte ist dem Produkte aus Widerstand und hindurchgeflossener Elektrizitätsmenge für den ursprünglichen linearen Leiter gleich.

Nun ist die rechte Seite der Gleichung (164) von der Fläche f unabhängig. Betrachten wir verschiedene Flächen, die alle von der Leitlinie eines und desselben Drahtes umschlossen sind, so muß das Integral der magnetischen Induktion für alle diese Flächen das gleiche sein. Stellen wir das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ durch Kurven dar, sogenannte „Induktionslinien", so muß die Zahl der Induktionslinien, die zwei Flächen derselben Randkurve in einem gegebenen Sinne durchsetzen, stets die gleiche sein. Die Zahl der Induktionslinien, die aus einer geschlossenen Fläche heraustritt, ist also stets gleich Null. Das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ ist überall quellenfrei; es gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{165}$$

Wir haben bereits hier in ungezwungener Weise das Fehlen des wahren Magnetismus in die Theorie eingeführt. Wir gingen dabei aus von einem unmagnetischen Zustande des betreffenden Körpers und dachten uns ein stationäres

Magnetfeld erregt. Hat man es mit einem Felde im Innern permanenter Magnete zu tun, so kann die Anwendbarkeit der Betrachtungen auf den ersten Blick fraglich erscheinen, da hier kein unmagnetischer Anfangszustand vorliegt. Immerhin ist die Annahme plausibel, daß ein solcher Anfangszustand einmal existiert hat. Denkt man sich im Innern des ferromagnetischen Metalles einen engen Kanal gebohrt, in den die Probespule bzw. der lineare Leiter gebracht wird, und die Elektrizitätsmengen gemessen, die von dem Zeitpunkte des unmagnetischen Zustandes an bis zu dem gegenwärtigen Zeitpunkte der permanenten Magnetisierung hindurchgeströmt sind, so gelangt man auch hier zur Definition des Vektors $\mathfrak{B}$ und zur Erkenntnis seines quellenfreien Charakters. Auch im Innern permanenter Magnete werden wir daher wahren Magnetismus nicht annehmen.

Wie wir durch Untersuchung des elektrostatischen Feldes mit Hilfe des Probekörpers zunächst das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ konstruierten, so führt uns die Probespule zunächst auf den Vektor $\mathfrak{B}$. Insofern entspricht der Vektor $\mathfrak{B}$ der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$. Während aber der Vektor $\mathfrak{E}$ im elektrostatischen Felde wirbelfrei war, ist $\mathfrak{B}$ — und zwar allgemein — quellenfrei. Wie $\mathfrak{E}$ als wirbelfreier Vektor vom elektrostatischen Potentiale, so leitet sich $\mathfrak{B}$ als quellenfreier Vektor von einem Vektorpotentiale $\mathfrak{A}$ ab

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}. \tag{165a}$$

Hiernach darf man bei stationären Feldern von einer Analogie zwischen den Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ reden in demselben Sinne, in dem wir im ersten Abschnitte dieses Bandes von einer Analogie des wirbelfreien und des quellenfreien Vektorfeldes sprachen.

§ 56. Die magnetische Feldstärke.

Wir haben im ersten Abschnitte dieses Buches gezeigt, daß ein den unendlichen Raum quellenfrei erfüllendes Feld durch seine Wirbel bestimmt ist (vgl. § 26). Es liegt daher

nahe, nach den Wirbeln des Vektors $\mathfrak{B}$ zu fragen, ebenso wie im zweiten Abschnitte dieses Buches die Frage nach den Quellen des Feldes $\mathfrak{E}$ auftrat. Ein einfacher Zusammenhang zwischen der Divergenz von $\mathfrak{E}$ und der wahren Elektrizität lag nur für das Feld im leeren Raume vor; waren dielektrische Körper im Felde, so bestimmte sich die Divergenz von $\mathfrak{D}$, nicht diejenige von $\mathfrak{E}$, durch die Dichte der wahren Elektrizität. Untersuchen wir nun die Umgebung eines stromführenden Drahtes in der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise mit einer Probespule, so finden wir nur im leeren Raume einen allgemeingültigen Zusammenhang zwischen dem Felde $\mathfrak{B}$ und dem elektrischen Strome; es ist der Vektor $\mathfrak{B}$ in dem stromlosen Gebiete wirbelfrei; die Wirbel haben ausschließlich in den stromdurchflossenen Leitern ihren Sitz und sind der Stromdichte proportional. Sind aber paramagnetische oder diamagnetische Körper im Felde, so fällt dieser einfache Zusammenhang fort. Es empfiehlt sich dann, einen zweiten magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ einzuführen, den wir „magnetische Feldstärke“ oder auch „magnetische Kraft“ nennen wollen; dessen Wirbel soll stets in dem elektrischen Strome seinen Sitz haben.

Denken wir uns einen linearen Leiter von einem konstanten Strome J durchflossen, so ist der Vektor $\mathfrak{H}$ folgendermaßen zu definieren. Für jede den Leiter einmal umschlingende Kurve $\mathfrak{s}$ soll das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ der Stromstärke J proportional sein

$$\int_P^P \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi J}{c}, \tag{166}$$

für jede den Stromleiter nicht umschlingende Kurve aber soll das Linienintegral gleich Null sein. — Die in (166) auftretende universelle Konstante c ist mit der in (163) eingeführten identisch; sie hängt in einer später genauer zu erörternden Weise von den Einheiten ab, in denen J und $\mathfrak{H}$ gemessen werden. Der Umlaufssinn längs $\mathfrak{s}$ soll der Strömungsrichtung

der Elektrizität sich zuordnen, wie der Umlaufssinn der Fortschreitungsrichtung bei einer Rechtsschraube.

Der diesen Bedingungen genügende Vektor $\mathfrak{H}$ ist nun — das besagt das zugrunde zu legende Erfahrungsgesetz — dem Vektor $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion proportional. Es gilt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{167}$$

wenigstens für isotrope Körper.

Die hier auftretende Materialkonstante μ soll, wie erwähnt, für den Äther gleich 1 gesetzt werden.

Verbinden wir mit diesen Aussagen den Ansatz (162) für die magnetische Energie, so haben wir das magnetische Feld eines linearen, von einem stationären Strome durchflossenen Leiters erschöpfend charakterisiert. Schließen wir ferromagnetische Körper aus, in denen μ nicht konstant ist, so sind die Gleichungen (165), (166), (167) alle linear, es superponieren sich demnach die Felder verschiedener Stromleiter.

Der für die Energie des magnetischen Feldes gemachte Ansatz (162) machte es notwendig, in die Beziehung zwischen J und $\mathfrak{H}$ (166) dieselbe von den Maßeinheiten abhängige Konstante c aufzunehmen, die in der Definitionsgleichung (163) des Vektors $\mathfrak{B}$ auftrat. Denn die Energie des magnetischen Feldes eines Stromleiters muß offenbar unabhängig von der Wahl der Einheit sein, in der Stromstärken gemessen werden, solange als diese Wahl mit dem absoluten C.-G.-S.-System verträglich ist. Soll das skalare Produkt von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ von der Wahl der Maßeinheiten unabhängig sein, so muß der Faktor c bei der Multiplikation sich herausheben, da ReJ von der Dimension einer Energie, mithin seinerseits von der Wahl des Maßsystems unabhängig ist.

Wir denken uns den ganzen Raum von einem Medium konstanter magnetischer Permeabilität erfüllt. Für diesen speziellen Fall können wir das magnetische Feld eines linearen Leiters ohne weiteres bestimmen. In diesem Falle folgt nämlich aus (165) und (167)

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \mu \cdot \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

es ist also nicht nur $\mathfrak{B}$, sondern auch $\mathfrak{H}$ durchweg quellenfrei verteilt. Wir haben es daher mit dem quellenfreien Felde einer einzigen Wirbellinie zu tun, deren Eigenschaften uns durch die Entwickelungen des § 29 bekannt sind. Dem Momente τ der Wirbellinie entspricht hier der Ausdruck $\frac{J}{c}$, so daß die Gleichung (110) ergibt

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c} \cdot \int \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s}\, \mathfrak{r}]. \tag{168}$$

Dies ist das magnetische Feld einer geschlossenen Stromlinie.

Wir können den Ausdruck interpretieren als Summe der Beiträge, die von den einzelnen Stromelementen $Jd\mathfrak{s}$ in dem in der Entfernung $\mathfrak{r}$ befindlichen Aufpunkte erregt werden und die sich aus dem Biot-Savartschen Elementargesetze bestimmen. Aber hier, wie auch in § 29, ist zu bemerken, daß die Zerlegung einigermaßen willkürlich ist; die Stromelemente sind einzeln nicht existenzfähig; wir haben es vielmehr mit einem geschlossenen, von einem stationären Strome durchflossenen Leitungsdrahte zu tun und haben nach der Maxwellschen Theorie dessen Feld als Ganzes zu betrachten.

Was nun das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ anbelangt, so empfiehlt es sich, mit Maxwell dieses Vektorpotential der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ zuzuordnen, gemäß Gleichung (165a). In dem jetzt in Rede stehenden Falle einer überall gleichen Permeabilität ist zwar auch $\mathfrak{H}$ quellenfrei und daher als Curl eines Vektorpotentiales darzustellen, aber auf den allgemeinen Fall eines von Körpern verschiedener Permeabilität erfüllten Raumes würde sich diese Beziehung nicht ausdehnen lassen. Wir setzen daher

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

und erhalten durch Vergleichung mit (109)

$$\mathfrak{A} = \mu \cdot \frac{J}{c} \cdot \int \frac{d\mathfrak{s}}{r} \tag{168a}$$

als Vektorpotential der Stromlinie.

Für das magnetische Feld elektrischer Ströme gibt uns die Erfahrung zunächst nur Integralgesetze. Wir gelangen auch hier, wie beim Ohmschen Gesetze (§ 47), zu den für die weitere theoretische Formulierung zweckmäßigeren Differentialgesetzen, indem wir zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen.

Die Gleichung (166) in Verbindung mit (152b) ergibt

$$\int ds \mathfrak{H}_s = \frac{4\pi}{c} \cdot \int \mathfrak{i}_n df,$$

wo f eine beliebige, von der Kurve s umrandete Fläche ist und $\mathfrak{i}_n$ die Dichte der das Element df dieser Fläche senkrecht durchfließenden Strömung.

Ziehen wir nun die Kurve s mehr und mehr zusammen, so ergibt nach § 25 die linke Seite den Curl von $\mathfrak{H}$; es wird

$$\text{curl } \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}. \tag{169}$$

Dieses differentielle Verknüpfungsgesetz von Leitungsstrom und magnetischem Felde wollen wir als erste Hauptgleichung des Elektromagnetismus bezeichnen.

Beschränken wir uns wiederum auf den Fall einer durchweg konstanten Permeabilität, so können wir das magnetische Feld eines vollständigen Stromsystemes in ganz entsprechender Weise ableiten, wie wir im § 26 des ersten Abschnittes das quellenfreie Vektorfeld bei gegebener Wirbelverteilung bestimmten. Wir haben

$$\text{div } \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \text{div } \mathfrak{B} = 0,$$

und diese Gleichung zusammen mit (169) entspricht durchaus den Gleichungen (96) des § 26. Wir haben nur an Stelle von $\mathfrak{c}$ hier $\frac{\mathfrak{i}}{c}$ zu schreiben und ferner, da

$$\mathfrak{H} = \text{curl } \frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

gesetzt werden soll, $\frac{\mathfrak{A}}{\mu}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$. Dann ergibt Gleichung (100)

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \cdot \int \frac{dv\,\mathfrak{i}}{r}; \tag{170}$$

aus diesem Vektorpotential leiten sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ folgendermaßen ab

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \mathfrak{B}. \tag{170a}$$

Hierdurch ist die vorgelegte Aufgabe gelöst. Es folgt übrigens aus den Entwickelungen des § 26, daß $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ verschwindet, wenn die Integration über das ganze von Elektrizität durchströmte Gebiet erstreckt wird.

Ganz ähnlich, wie wir im § 26 die Energie des quellenfreien Vektorfeldes durch ein über die Wirbel erstrecktes Integral darstellten, so können wir die magnetische Energie (162) eines beliebigen elektrischen Stromsystemes durch ein über das stromerfüllte Gebiet erstrecktes Integral ausdrücken. Nach (162) und (165a) ist die magnetische Energie

$$T = \frac{1}{8\pi} \cdot \int dv (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{A}).$$

Die Rechnungsregel (102) ergibt

$$\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \operatorname{div} [\mathfrak{H}\mathfrak{A}],$$

daher

$$T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) - \frac{1}{8\pi} \int dv \operatorname{div} [\mathfrak{H}\mathfrak{A}].$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes bringt das letzte Glied auf die Form

$$-\frac{1}{8\pi} \int df [\mathfrak{H}\mathfrak{A}]_r;$$

läßt man die Begrenzungsfläche des Feldes in das Unendliche rücken, so verschwindet dieses Integral für ein jedes im Endlichen liegende Stromsystem und es wird nach (169)

$$T = \frac{1}{2c} \cdot \int dv (\mathfrak{i}\mathfrak{A}). \tag{170b}$$

Diese Umformung des Energieausdruckes (162) ist von der Annahme durchweg konstanter Permeabilität unabhängig. Sie beruht nur auf der ersten Hauptgleichung (169) und der durch (165) ausgedrückten Eigenschaft des Vektors $\mathfrak{B}$, überall quellenfrei zu sein, einer Eigenschaft, die wir auch dem Felde im Innern remanter Magnete zuschrieben. Lassen wir nun die elektrischen Ströme verschwinden, so verschwindet auch die rechte Seite des umgeformten Energieausdruckes (170b). Hiernach wäre die Energie eines permanenten Magnetes gleich Null, wenn kein elektrischer Strom ihn durchfließt. Dieses Ergebnis ist mit der Erfahrung nicht verträglich. Wir können die Überlegung auch direkt an den Satz des § 28 anknüpfen: Das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null. In der Tat nehmen wir allgemein

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

an und setzen für das Innere eines nicht von elektrischen Strömen durchflossenen Magneten nach (169)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0,$$

so folgt aus jenem Satze, daß die nach der Formel (162) berechnete Energie des Magneten gleich Null ist. Da wir nun den Vektor $\mathfrak{H}$ geradezu dadurch definierten, daß seine Wirbel nur in wahren elektrischen Strömen ihren Sitz haben, so bleibt uns nichts anderes übrig, als für ferromagnetische Körper den Energieansatz (162) aufzugeben. Das wird in der Tat bei der Behandlung dieser Körper im vierten Abschnitte dieses Bandes geschehen.

Der ursprüngliche Ansatz (162) für die magnetische Energie betrachtet, den Vorstellungen der Nahewirkungstheorie gemäß, das ganze Feld als Sitz der Energie. Es ist sehr bemerkenswert, daß der umgeformte Ausdruck (170b), der für stationäre elektrische Ströme denselben Energiebetrag ergibt, eine der Fernwirkungstheorie entsprechende Deutung zuläßt, indem die Energie als über die Stromfäden verteilt erscheint. Für die magnetische Energie stationärer Ströme ergeben in der Tat

Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie den gleichen Wert. Die Vorzüge des Maxwellschen Energieausdruckes treten erst bei rasch veränderlichen Feldern hervor.

§ 57. Der freie Magnetismus und das skalare Potential eines magnetisierten Körpers.

Ein gegebenes System elektrischer Ströme mag im leeren Raume ein magnetisches Feld erregen, dessen magnetische Feldstärke mit $\mathfrak{H}_0$, dessen magnetische Induktion mit $\mathfrak{B}_0$ bezeichnet werde. Nach (170), (170a) hat man

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 = \operatorname{curl} \mathfrak{A}_0$$

und

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{c} \cdot \int dv \frac{\mathfrak{i}}{r}, \tag{171}$$

daher

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}_0 = \frac{1}{c} \cdot \int \frac{dv}{r^3} \cdot [\mathfrak{i}\mathfrak{r}], \tag{171a}$$

wo $\mathfrak{r}$ den von dem durchströmten Volumelemente nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor bezeichnet.

Wir denken uns in dem Felde ein stromloses Gebiet abgegrenzt und in dieses jetzt Körper gebracht, deren magnetische Permeabilität μ von 1 verschieden ist. Es kann μ von Punkt zu Punkt sich stetig ändern, sei es infolge der Inhomogenität des betreffenden Körpers, sei es, weil in ferromagnetischen Körpern die Permeabilität von der Feldstärke abhängt. Es können aber auch an der Trennungsfläche verschiedener Körper sprungweise Änderungen von μ vorkommen. Es wird sich nach Einführung jener Körper ein Feld herstellen, dessen Feldstärke $\mathfrak{H}$ und dessen Induktion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{B}_0$ verschieden sind. Wir stellen uns die Aufgabe, die Eigenschaften dieser Vektoren zu untersuchen.

Nun muß, unseren Grundannahmen zufolge, wie in jedem Felde, so auch hier das Integral der normalen Induktion für jede geschlossene Fläche gleich Null sein. Es muß also nicht nur überall die räumliche Divergenz, sondern auch an den Trennungsflächen verschiedener Körper die Flächendivergenz

(§ 23) von $\mathfrak{B}$ verschwinden. Daraus folgt: die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ durchsetzt stetig die Trennungsfläche zweier verschiedener Körper.

Da ferner das zu betrachtende Gebiet des Feldes stromlos ist, so muß das Linienintegral der Tangentialkomponente von $\mathfrak{H}$ für jede in dem Gebiete verlaufende geschlossene Kurve verschwinden. Es ist also nicht nur überall

$$\text{curl } \mathfrak{H} = 0, \tag{172}$$

sondern außerdem ist an den Trennungsflächen verschiedener Körper der Flächenwirbel (§ 27) von $\mathfrak{H}$ gleich Null. Daraus folgt: die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}$ durchsetzen stetig die Trennungsflächen zweier verschiedener Körper.

Vergleicht man das in Rede stehende stromlose Gebiet des konstanten magnetischen Feldes mit dem von wahrer Elektrizität freien Gebiete eines elektrostatischen Feldes, so bemerkt man, daß hier die Heaviside-Hertzsche Analogie (§ 54) sich durchführen läßt. Der Gleichung

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0$$

entspricht

$$\text{div } \mathfrak{D} = 0,$$

der Gleichung

$$\text{curl } \mathfrak{H} = 0$$

entspricht

$$\text{curl } \mathfrak{E} = 0.$$

Auch in den Grenzbedingungen entsprechen sich die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, deren Tangentialkomponenten, und die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, deren Normalkomponenten stetig sein müssen. Man kann daher das im § 39 abgeleitete Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien unmittelbar auf die magnetischen Kraftlinien übertragen. In der Tat, sind α_1, α_2 die Winkel, welche die magnetischen Vektoren zu beiden Seiten der Trennungsfläche mit einer der Flächennormalen einschließen, so hat man

$$|\mathfrak{B}_1| \cos \alpha_1 = |\mathfrak{B}_2| \cos \alpha_2, \quad |\mathfrak{H}_1| \sin \alpha_1 = |\mathfrak{H}_2| \sin \alpha_2,$$

daher

$$\text{tg } \alpha_1 : \text{tg } \alpha_2 = \mu_1 : \mu_2. \tag{172a}$$

Daß hier die Analogie sich vollständig durchführen läßt, liegt an der Spezialisierung, die wir einführten. Verschwindet die wahre Elektrizität, so ist $\mathfrak{D}$ quellenfrei, wie $\mathfrak{B}$ es stets ist; verschwindet der elektrische Strom, so ist $\mathfrak{H}$ wirbelfrei, wie es $\mathfrak{E}$ im Falle des elektrischen Gleichgewichtes ist. Obwohl nun bei einer allgemeineren Problemstellung die Analogie versagt, so wird es doch nützlich sein, sich gerade im vorliegenden Falle von ihr leiten zu lassen.

Das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ wird bestimmt sein, wenn man die Verteilung seiner Quellen kennt. Man setze die räumliche Divergenz von $\mathfrak{H}$ gleich $4\pi\varrho'_m$, die Flächendivergenz an den Trennungsflächen verschiedener Körper gleich $4\pi\omega'_m$. Es gibt dann ϱ'_m die räumliche Dichte, ω'_m die Flächendichte des freien Magnetismus an.

Freier Magnetismus tritt nur dort auf, wo μ variiert. Denn an der Trennungsfläche zweier Körper derselben Permeabilität ist die Flächendivergenz von $\mathfrak{H}$ derjenigen von $\mathfrak{B}$ proportional, die stets gleich Null ist. Und für das Innere der Körper folgt aus dem Verschwinden der Divergenz von $\mathfrak{B}$

$$0 = \operatorname{div}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\mu\mathfrak{H} = \mu\cdot\operatorname{div}\mathfrak{H} + (\mathfrak{H},\ \nabla\mu),$$

daher

$$4\pi\varrho'_m = \operatorname{div}\mathfrak{H} = -\frac{1}{\mu}(\mathfrak{H},\ \nabla\mu). \tag{172b}$$

Es tritt demnach nur dort freier Magnetismus auf, wo die Permeabilität einen Gradienten besitzt, d. h. in inhomogenen oder in ferromagnetischen Körpern.

Da das durch das Hereinbringen der Körper modifizierte Feld $\mathfrak{H}$ von denselben Strömen erregt ist, wie das ursprüngliche Feld $\mathfrak{H}_0$, so ist $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ wirbelfrei. Da aber $\mathfrak{H}_0$ keine Quellen besitzt, sondern nur Wirbel, so sind die Quellen von $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$, wie diejenigen von $\mathfrak{H}$ nur in den hereingebrachten Körpern befindlich, nämlich dort, wo freier Magnetismus sich befindet. Das skalare Potential des Feldes $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ ist daher

$$\varphi_m = \int\frac{dv\,\varrho'_m}{r} + \int\frac{df\,\omega'_m}{r} \tag{172c}$$

entsprechend der Formel (138a) für das skalare Potential des elektrostatischen Feldes. Kennen wir also die Verteilung des freien Magnetismus, so sind wir vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = - \nabla \varphi_m \tag{172d}$$

imstande, anzugeben, wie durch Hereinbringen der Körper in das stromlose Gebiet das magnetische Feld geändert ist; und zwar beziehen sich die Formeln sowohl auf das Feld außerhalb, wie auf das Feld innerhalb der hereingebrachten para-, dia- oder ferromagnetischen Körper.

Wir können den Ausdruck für das skalare Potential des von diesen Körpern erregten Feldes $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ auf eine Form bringen, welche der im § 41 für das Potential eines Dielektrikums erhaltenen entspricht und eine entsprechende Deutung gestattet. Wir wollen bei der Umformung die Veränderungen der Permeabilität im Innern des betrachteten Körpersystemes als stetig ansehen und Unstetigkeiten nur an der Trennungsfläche gegen den Äther zulassen. Wir führen einen neuen Vektor $\mathfrak{M}$ ein, den wir durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}\} \tag{173}$$

definieren und als Magnetisierung bezeichnen. Er entspricht dem im § 41 eingeführten Vektor $\mathfrak{P}$ der elektrischen Polarisation. Wir können schreiben

$$\mathfrak{M} = \varkappa \mathfrak{H}, \tag{173a}$$

wo

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

die „magnetische Suszeptibilität“ genannt wird. Im leeren Raume ist die Suszeptibilität, wie die Magnetisierung Null. Einen materiellen Körper, in dem der Vektor $\mathfrak{M}$ von Null verschieden ist, bezeichnet man als magnetisiert.

Da $\mathfrak{B}$ durchweg quellenfrei ist, so folgt aus (173)

$$\varrho'_m = - \operatorname{div} \mathfrak{M}, \tag{173b}$$

$$\varpi'_m = \mathfrak{M}_\nu, \tag{173c}$$

wo ν die von der Begrenzungsfläche der magnetisierten Körper nach außen (nach dem Äther hin) gezogene Normale bezeichnet. Das Potential (172c) des magnetisierten Körpers wird jetzt

$$\varphi_m = -\int \frac{dv \operatorname{div} \mathfrak{M}}{r} + \int \frac{df \mathfrak{M}_\nu}{r}.$$

Das Flächenintegral mit Hilfe der aus dem Gaußschen Satze abgeleiteten Gleichung (73) umformend, erhalten wir für φ_m ein über das Volumen des magnetisierten Körpers zu erstreckendes Integral

$$\varphi_m = \int dv \left(\mathfrak{M}, \nabla_\varrho \frac{1}{r}\right). \tag{173d}$$

Dieser Ausdruck für das skalare Potential eines magnetisierten Körpers entspricht durchaus dem in Formel (142c) des § 41 für das Potential eines dielektrisch polarisierten Körpers abgeleiteten. Wir können ihn in entsprechender Weise deuten, indem wir den Körper in seine Volumelemente zerlegt denken. Jedes Volumelement wird dann als Träger einer Doppelbelegung von freiem Magnetismus angesehen. Durch Superposition der Felder aller der magnetisierten Volumelemente erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (80)

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = -\nabla_a \varphi_m = \nabla_a \int dv \left(\mathfrak{M}, \nabla_a \frac{1}{r}\right), \tag{173e}$$

einen Ausdruck, der das Feld des magnetisierten Körpers sowohl innerhalb, wie außerhalb richtig angibt. Nach den Koordinatenachsen zerlegend und die durch ∇_a angedeuteten Differentiationen nach den Koordinaten xyz des Aufpunktes ausführend, erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{H}_x - \mathfrak{H}_{0x} &= \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\}, \\
\mathfrak{H}_y - \mathfrak{H}_{0y} &= \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right\}, \\
\mathfrak{H}_z - \mathfrak{H}_{0z} &= \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{173f}$$

Da $\mathfrak{H}_0$ durch (171a) gegeben ist, so bestimmt sich, wenn $\mathfrak{M}$ bekannt ist, hieraus das Feld $\mathfrak{H}$, und vermöge

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

dann auch die magnetische Induktion im Innern des magnetisierten Körpers. Meistens ist allerdings $\mathfrak{M}$ selbst unbekannt.

Für eine in ein homogenes Feld $\mathfrak{H}_0$ gebrachte Kugel läßt sich die Magnetisierung und das Feld bestimmen, genau so, wie im § 42 das analoge elektrostatische Problem gelöst wurde. Man findet (vgl. Gleichung 145), daß die entstehende Magnetisierung der Kugel homogen und zwar gleich

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \mathfrak{H}_0 \tag{173g}$$

ist.

Im Innern der homogen magnetischen Kugel befindet sich, wie aus (173b) hervorgeht, kein freier Magnetismus. Derselbe hat ausschließlich auf der Oberfläche seinen Sitz, wo er, nach (173c), mit der Dichte

$$\omega_m' = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot |\mathfrak{H}_0| \cdot \cos\vartheta \tag{173h}$$

verteilt ist; ϑ gibt dabei den Winkel an, den der Kugelradius an dem betreffenden Punkte der Oberfläche mit der Richtung des ursprünglichen Feldes $\mathfrak{H}_0$ einschließt. Die Flächendichte des freien Magnetismus ist Null am Äquator, sie ist auf der einen Kugelhälfte positiv, auf der anderen negativ; die vom Pole der negativ belegten Halbkugel nach dem der positiv belegten weisende Richtung stimmt mit $\mathfrak{H}_0$ überein, wenn $\mu > 1$ ist, sie weist $\mathfrak{H}_0$ entgegen, wenn $\mu < 1$ ist.

§ 58. Der freie elektrische Strom und das Vektorpotential eines magnetisierten Körpers.

Wir wollen das im vorigen Paragraphen behandelte Problem noch von einem anderen Standpunkte aus diskutieren. Wir wollen der Lösung eine solche Form geben, daß bei gegebener Magnetisierung $\mathfrak{M}$ nicht sowohl die Feldstärke $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$, als vielmehr die magnetische Induktion $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0$ direkt bestimmt

wird. Da in dem ursprünglichen Felde $\mu = 1$, daher $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_0$ war, so folgt aus (173) und (173f) für die x-Komponente

$$\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}_{0x} = 4\pi\mathfrak{M}_x + \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\}.$$

Nun ist nach der Poissonschen Gleichung

$$4\pi\mathfrak{M}_x = -\nabla_a^2 \int \frac{dv\,\mathfrak{M}_x}{r} = -\int dv\,\mathfrak{M}_x \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\},$$

sowohl im Innern des magnetisierten Körpers, als auch außerhalb, wo beide Seiten der letzten Gleichung verschwinden. Wir erhalten daher

$$\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}_{0x} = \frac{\partial}{\partial y} \int dv \left\{ \mathfrak{M}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\}$$
$$- \frac{\partial}{\partial z} \int dv \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \mathfrak{M}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right\}.$$

Diese Formel und die entsprechenden beiden, für die y-Komponente und die z-Komponente geltenden schreiben wir in Vektorform

(174) $$\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = \operatorname{curl}\{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0\},$$

wo

(174a) $$\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0 = -\int dv \left[\mathfrak{M}, \nabla_a \frac{1}{r}\right] = +\int dv \left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right]$$

das Vektorpotential des magnetisierten Körpers darstellt.

Diese durch formale Umrechnung der Resultate des vorigen Paragraphen erhaltene Darstellung des Feldes erfordert eine eingehendere Diskussion. Sie bestimmt direkt die vom magnetisierten Körper herrührende Veränderung der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$. Die Darstellung mit Hilfe des skalaren Potentiales ist offenbar auf stromlose Felder beschränkt, in denen

$$\operatorname{curl}\{\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0\} = 0$$

ist. Die Darstellung mit Hilfe des Vektorpotentiales stützt sich auf die quellenfreie Beschaffenheit des Vektors $\mathfrak{B}$ und ist daher nicht auf stromlose Felder beschränkt, sondern sie gilt allgemein für jedes konstante magnetische Feld. Wir wollen daher den Ausdruck für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ direkt ableiten, und zwar für beliebige Stromverteilung und für beliebige magnetisierbare Körper. Wir wollen dabei die in den §§ 55 und 56 bemerkte Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ einerseits $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ anderseits deutlicher hervortreten lassen.

Wie div $\mathfrak{D}$ durch die wahre Elektrizität bestimmt wird, so wird curl $\mathfrak{H}$ durch den elektrischen Strom bestimmt. Da aber im elektrostatischen Felde nicht $\mathfrak{D}$, sondern $\mathfrak{E}$ sich allgemein als negativer Gradient eines skalaren Potentiales darstellt, so wünscht man behufs Berechnung desselben nicht die Quellen von $\mathfrak{D}$, sondern diejenigen von $\mathfrak{E}$ zu kennen. Daher führt man die Rechnungsgröße ein, die man als „freie Elektrizität" bezeichnet und deren Dichte der Divergenz von $\mathfrak{E}$ proportional ist. Hier, im magnetischen Felde, ist $\mathfrak{B}$ allgemein als Curl eines Vektorpotentiales $\mathfrak{A}$ darzustellen. Behufs Berechnung dieses Vektorpotentiales müßten wir die Wirbel von $\mathfrak{B}$ kennen. Zunächst kennen wir indessen nur die Wirbel von $\mathfrak{H}$, die der wahren Stromdichte proportional sind. Daher führen wir eine Rechnungsgröße ein, welche die Verteilung der Wirbel von $\mathfrak{B}$ anzeigt und welche wir als „Dichte des freien elektrischen Stromes" bezeichnen. Wir definieren, der Gleichung (169) für die wirkliche Stromdichte entsprechend, durch

$$\text{curl}\,\mathfrak{B} = \frac{4\pi \mathfrak{i}'}{c} \tag{175}$$

die „räumliche Dichte $\mathfrak{i}'$ des freien Stromes" und, da wir Unstetigkeitsflächen in Betracht ziehen wollen, durch

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2] = \frac{4\pi \mathfrak{j}'}{c} \tag{175a}$$

die „Flächendichte $\mathfrak{j}'$ des freien Stromes". Diese letztere Formel ergibt sich aus der in Gleichung (104) des § 27 für den Flächenwirbel erhaltenen; $\mathfrak{n}$ bezeichnet dabei einen Einheits-

vektor, der nach der durch den Index 1 gekennzeichneten Seite der betreffenden Trennungsfläche f_{12} zweier Körper hinweist. Der freie Strom stimmt im ganzen Raume mit dem Wirbel des Vektors $\mathfrak{B}$ überein, bis auf den universellen Faktor c. Der freie Strom ist demnach, ebenso wie der wirkliche Strom, im stationären Felde durchweg quellenfrei verteilt.

Aus den Resultaten der §§ 26, 27 erhalten wir jetzt das Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}'}{r} + \frac{1}{c}\int df_{12}\,\frac{\mathfrak{j}'}{r}, \tag{175b}$$

wobei das erste Integral über den Raum, das zweite über die Unstetigkeitsflächen zu erstrecken ist. Da das Feld des freien Stromes als Wirbelfeld des Vektors $\mathfrak{B}$ definiert ist, so folgt nach § 26, daß die Gleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0 \tag{175c}$$

erfüllt ist, wofern nur die Integration über das ganze Wirbelgebiet von $\mathfrak{B}$ erstreckt wird. Kennt man die Verteilung des freien Stromes, so kann man das Vektorpotential und vermöge

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl}\mathfrak{A} \tag{175d}$$

die magnetische Induktion finden, ähnlich wie man bei Kenntnis der Verteilung der freien Elektrizität das skalare Potential und die elektrische Kraft des elektrostatischen Feldes bestimmen kann. Freilich ist der freie Strom nur eine Rechnungsgröße; seine Verteilung ist keineswegs von vornherein bekannt.

Nach (175), (112) und (169) ist

$$\frac{4\pi\mathfrak{i}'}{c} = \operatorname{curl}\mu\mathfrak{H} = \mu\cdot\frac{4\pi\mathfrak{i}}{c} + [\nabla\mu, \mathfrak{H}],$$

daher

$$\mathfrak{i}' = \mu\mathfrak{i} + \frac{c}{4\pi}\Big[\nabla\mu, \mathfrak{H}\Big]. \tag{175e}$$

Es tritt demnach nur dort freie Strömung auf, wo entweder ein wirklicher Strom fließt oder die Permeabilität einen Gradienten besitzt; letzteres kann in inhomogenen sowie in ferromagnetischen Körpern statt-

finden. Unstetigkeitsflächen mit flächenhaft verteilter Strömung sind als extremer Grenzfall eines inhomogenen Körpers aufzufassen.

Wir wollen jetzt den freien Strom zu der Magnetisierung $\mathfrak{M}$, die in (173) definiert wurde, in Beziehung setzen. Es ist

$$\frac{4\pi \mathfrak{i}'}{c} = \operatorname{curl}\{\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}\} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + 4\pi \operatorname{curl}\mathfrak{M},$$

daher

$$\frac{\mathfrak{i}'}{c} = \frac{\mathfrak{i}}{c} + \operatorname{curl}\mathfrak{M}. \tag{176}$$

Ganz entsprechend wie die räumliche Dichte, drückt sich die Flächendichte des freien Stromes durch die Flächendichte $\mathfrak{j}$ des wirklichen Stromes und den Flächenwirbel von $\mathfrak{M}$ aus:

$$\frac{\mathfrak{j}'}{c} = \frac{\mathfrak{j}}{c} + [\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2]. \tag{176a}$$

Wir werden indessen den wirklichen Leitungsstrom infolge des endlichen Widerstandes der Leiter im allgemeinen nur als räumlich verteilt ansehen dürfen und seine Flächendichte $\mathfrak{j}$ daher gleich Null zu setzen haben. Daher wird (175b)

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}}{r} + \int \frac{dv}{r} \operatorname{curl}\mathfrak{M} + \int \frac{df_{12}}{r}\Big[\mathfrak{n}, \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2\Big]. \tag{176b}$$

Wir fassen die Glieder zusammen, die von der Magnetisierung des durch den Index 1 charakterisierten Körpers herrühren, wobei wir berücksichtigen, daß die äußere Normale ν_1 der Begrenzungsfläche f_1 dieses Körpers dem Vektor $\mathfrak{n}$ entgegen weist; alsdann erhalten wir für die x-Komponente des erregten Vektorpotentiales

$$\int \frac{dv_1}{r}\left\{\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial \zeta}\right\} + \int \frac{df_1}{r}\{\mathfrak{M}_y \cos(\nu_1 z) - \mathfrak{M}_z \cos(\nu_1 y)\}.$$

Die partielle Integration nach den Koordinaten ξ, η, ζ der Punkte des magnetisierten Körpers ergibt

$$\int dv_1 \left\{\mathfrak{M}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - \mathfrak{M}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\right\}.$$

Der resultierende Ausdruck des Vektorpotentiales ist daher

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}}{r} + \int dv \left[\mathfrak{M}, \nabla_2 \frac{1}{r}\right]. \tag{176c}$$

Er stimmt durchaus überein mit dem früher auf Grund spezieller Voraussetzungen in den Formeln (171), (174a) erhaltenen. Der jetzt gegebene Beweis ist ganz allgemein. Er beruht neben den allgemeinen Eigenschaften der Vektorfelder nur auf den Grundgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c}.$$

Die Formel (176c) gilt demnach, ebenso wie diese Grundformeln, für jedes stationäre magnetische Feld, z. B. auch dann, wenn magnetisierbare Körper vom Strome durchflossen sind. Ist die Verteilung des elektrischen Stromes sowie die Magnetisierung der Körper bekannt, so bestimmt (175d) zusammen mit (176c) das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ sowohl außerhalb wie auch innerhalb der magnetisierten und der den elektrischen Strom leitenden Körper.

Eine homogene, stromlose Eisenkugel nimmt in einem homogenen Felde $\mathfrak{H}_0$ die durch (173g) gegebene homogene Magnetisierung an. Nach (176) ist in ihrem Innern keine freie Strömung, wohl aber zirkuliert nach (176a) eine solche längs ihrer Oberfläche. Beziehen wir den Index 1 auf den umgebenden Äther, so daß die von (2) nach (1) weisende Normale $\mathfrak{n}$ mit dem vom Mittelpunkte aus gezogenen Radiusvektor zusammenfällt, so wird

$$\frac{\mathfrak{j}'}{c} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \left[\mathfrak{H}_0, \mathfrak{n}\right]. \tag{176d}$$

Die freie Strömung zirkuliert also längs der Breitenkreise, und zwar von Westen nach Osten, wenn $\mathfrak{H}_0$ vom Südpol zum Nordpol weist und $\mu > 1$ ist. Der Betrag der Flächendichte der Strömung ist

$$|\mathfrak{j}'| = c \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot |\mathfrak{H}_0| \cdot \sin\vartheta, \quad \vartheta = \sphericalangle\, \mathfrak{n}, \mathfrak{H}_0.$$

Würde man die Eisenkugel beseitigen und statt dessen dieses fingierte Stromsystem anbringen, so würde jetzt im

Äther die Verteilung von $\mathfrak{B}$ die gleiche sein wie vorher innerhalb und außerhalb der Eisenkugel. Das Feld $\mathfrak{H}$ aber würde jetzt innerhalb der Kugel ein anderes sein. Wäre es hingegen möglich, die durch (173h) gegebene Verteilung von freiem Magnetismus durch wahren Magnetismus im leeren Raume zu ersetzen, so würde das Feld $\mathfrak{H}$ innerhalb und außerhalb der Kugel jetzt im Äther das gleiche sein, das vorher von der magnetisierten Eisenkugel erregt wurde. Die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ aber hätte innerhalb der Kugel einen anderen Betrag.

So dient die Einführung des freien Magnetismus zur Darstellung des Feldes $\mathfrak{H}$, die allgemeiner verwendbare weiter reichende des freien Stromes zur Darstellung der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$.

Der aus (175b), (175e) für den Fall stetig sich ändernder Permeabilität ($\mathfrak{j}' = 0$) resultierende Ausdruck des Vektorpotentiales

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv \cdot \mu \mathfrak{i}}{r} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{dv}{r}\left[\nabla\mu, \mathfrak{H}\right] \tag{176e}$$

geht für konstantes μ in (170) über. Wohl zu beachten ist indessen, daß die Permeabilität im allgemeinen Falle unter das Integralzeichen und nicht, wie dies bei der ursprünglichen Definition von Maxwell zutraf, vor das Integralzeichen zu setzen ist.

§ 59. Die beiden Hauptgleichungen.

Die erste Hauptgleichung war in der Form, die wir ihr gaben (Gleichung 169), auf stationäre elektrische Ströme beschränkt. Denn nur der stationäre Leitungsstrom ist quellenfrei verteilt, wie es Gleichung (169) verlangt. In der Tat folgt aus (169) und (94)

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0.$$

Ist der Leitungsstrom nicht quellenfrei, so ist es nicht möglich, ihn dem curl $\mathfrak{H}$ proportional zu setzen. Nun wissen wir aber (§ 48), daß ein nicht stationärer Strom im allgemeinen nicht

durchweg quellenfrei ist. Während der stationäre Strom nur in geschlossenen Leitungskreisen zirkuliert, können wechselnde Ströme auch in offenen, etwa durch einen Kondensator unterbrochenen Bahnen fließen. Hier bilden die Kondensatorbelegungen Quellen bzw. Senken des Leitungsstromes. Es ist daher nicht möglich, die Form (169) der ersten Hauptgleichung allgemein aufrecht zu erhalten.

Nun bemerkten wir indessen bereits in § 48, daß in diesem Falle der Leitungsstrom seine Fortsetzung in dem Verschiebungsstrome findet, daß Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen eine quellenfreie Strömung bilden. Es ist mithin vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus eine sehr plausible Annahme, daß im allgemeinen für zeitlich wechselnde Felder der „wahre Strom" $\mathfrak{c}$, der sich aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammensetzt, in der ersten Hauptgleichung den Leitungsstrom ersetzt. Das ist in der Tat die Annahme, welche Maxwell gemacht hat und welche die Maxwellsche Theorie von den anderen, auf den Anschauungen der Fernwirkung aufgebauten elektrodynamischen Theorien unterscheidet.

Jene Fernwirkungstheorien ergaben für die Elektrostatik sowie für stationäre elektrische Ströme Resultate, die mit denen der Maxwellschen Theorie übereinstimmten; nur die Interpretation war eine andere. Dort sah man die Potentiale, das skalare Potential bzw. das Vektorpotential, als das primäre an, die Erweiterung der Theorie auf ungeschlossene Leitungsströme suchte man durch Korrektion der Potentiale zu erzielen. Die Maxwellsche Theorie, welche die elektromagnetischen Vektoren als die fundamentalen Größen betrachtet, nimmt die Erweiterung in den differentiellen Verkettungsgleichungen vor und gelangt so zu der erweiterten ersten Hauptgleichung

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\cdot\mathfrak{c}, \tag{177}$$

Der Wirbel der magnetischen Feldstärke ist dem wahren Strome proportional.

Wir ziehen zunächst nur ruhende Körper in Betracht und haben daher Konvektionsströme (§ 49) nicht zu berücksichtigen, sondern für den wahren Strom $\mathfrak{k}$ den Ausdruck (157) zu setzen.

$$\text{(177a)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

ist die allgemeinste Form der ersten Hauptgleichung für ruhende Körper.

Die zweite Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie ergibt sich aus dem Faradayschen Induktionsgesetz. Wir haben dasselbe bereits im § 55 bei der Definition des Vektors $\mathfrak{B}$ herangezogen, haben aber dort nur von dem Zeitintegrale des Stromes gesprochen, der bei Erregung eines magnetischen Feldes in einem linearen Leiter induziert wird. Das Faradaysche Induktionsgesetz reicht aber weiter, es bezieht sich auf beliebig veränderliche magnetische Felder.

Wir denken uns in einem solchen Felde einen geschlossenen linearen Leiter. Dieser Leiter bilde die Umfangslinie eines Flächenstückes, welches so gelegt ist, daß jede Induktionslinie des Feldes die Fläche nicht mehr als einmal durchschneidet. Nach dem Faradayschen Induktionsgesetz wird dann in dem Leiter eine elektromotorische Integralkraft induziert, die der zeitlichen Abnahme der Zahl der die Fläche durchsetzenden magnetischen Induktionslinien proportional ist. Der Durchsetzungssinn der Induktionslinien und der Sinn der elektromotorischen Kraft im Leitungskreise sind einander wieder durch eine Rechtsschraube zugeordnet (vgl. § 55).

Wir können die induzierte elektrische Kraft zunächst als eingeprägte Kraft im Sinne des § 50 einführen. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{E}^i$, ihr Integral längs des geschlossenen Kreises mit E^i, so lautet die Formulierung des Induktionsgesetzes

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i_s \, ds = -\frac{1}{c} \cdot \int df \frac{\partial \mathfrak{B}_\nu}{\partial t}.$$

Der universelle Faktor $\frac{1}{c}$ ist hier eingeführt, um die Übereinstimmung mit den Definitionen des § 55 zu erzielen.

Im § 50 sahen wir, daß die totale elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, welcher die Dichte des Leitungsstromes proportional ist, sich zusammensetzt aus der von der Ansammlung freier Ladungen herrührenden „elektrostatischen Kraft“ $\mathfrak{E}^s$ und der durch chemische oder thermische Inhomogenität des Leiters bedingten eingeprägten oder elektromotorischen Kraft $\mathfrak{E}^e$. Indem wir nun die durch Veränderung des Magnetfeldes entstehende induzierte Kraft $\mathfrak{E}^i$ als der elektromotorischen Kraft $\mathfrak{E}^e$ gleichwertig betrachten, haben wir zu setzen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^i.$$

Da nun $\mathfrak{E}^s$, die „elektrostatische Kraft“, stets wirbelfrei verteilt ist, so fällt sie bei Integration längs des linearen Leiters heraus und es wird

$$\int \left\{ \mathfrak{E}_s - \mathfrak{E}_s^s \right\} ds = \int \mathfrak{E}_s^i \, ds = E^i.$$

Fällt die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$, welche nur durch die Beschaffenheit des betreffenden Körpers bestimmt ist, fort, so ist es allein die durch Veränderung des Magnetfeldes induzierte elektrische Kraft, welche Wirbel besitzt. Dieser Sachverhalt tritt noch deutlicher hervor, wenn wir nun wiederum zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen und auf diese die obigen Integralgesetze mit Hilfe des Stokesschen Satzes (§ 25) übertragen. Es wird dann

$$\text{curl}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^s\} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{178}$$

Diese differentielle Form des Induktionsgesetzes stellt für ruhende Körper die zweite Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes dar.

Die Integralgleichungen, aus der wir sie ableiteten, bezogen sich zunächst nur auf geschlossene Leitungskreise. Indessen liegt, vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus, die Auffassung nahe, daß elektrische Kräfte durch Veränderung des Magnetfeldes im Raume auch dann erregt werden, wenn kein Leiter anwesend ist, und daß wir des Leitungskreises nur

bedürfen, um das erregte elektrische Feld beobachten zu können. Dieser Auffassung entsprechend sieht die Maxwellsche Theorie die Hauptgleichung (178) für alle Punkte des Raumes als gültig an.

Bilden wir in (178) beiderseits die Divergenz, so folgt nach (94)

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Wir können also zunächst nur schließen, daß die Divergenz von $\mathfrak{B}$ an allen Punkten des von ruhenden Körpern erfüllten Feldes konstant ist. Machen wir indessen die Annahme, daß zu einer früheren Zeit einmal das betreffende Volumelement von magnetischer Erregung frei war, so gelangen wir zu der Grundgleichung (165) zurück:

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0. \tag{178a}$$

Wie bereits im § 55 erwähnt wurde, kann die Hypothese eines unmagnetischen Anfangszustandes Bedenken erregen, wenn permanente Magnete sich im Felde befinden; dennoch werden wir auch bei ferromagnetischen Körpern den Vektor $\mathfrak{B}$ als quellenfrei betrachten, wahren Magnetismus demnach ausschließen.

Stellt man die zweite Hauptgleichung (178) der ersten (177a) gegenüber, so fällt die Hertz-Heavisidesche Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ anderseits auf. Auf der linken Seite steht in der Tat jedesmal der Curl der Feldstärke $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$, auf der rechten steht die zeitliche Änderung der Vektoren $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Die Symmetrie wird nur gestört durch das Fehlen des magnetischen Leitungsstromes und durch die hiermit zusammenhängende, dem Vektor $\mathfrak{B}$ auferlegte Bedingung der Quellenlosigkeit, der $\mathfrak{D}$ im allgemeinen nicht zu genügen braucht. Man kann indessen diese Lücken der Analogie äußerlich verhüllen, indem man, mit dem Begriffe des „wahren elektrischen Stromes“ operierend, der Form (177) der ersten Hauptgleichung die zweite in der Form gegenüberstellt

$$\operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{4\pi}{c}\cdot\mathfrak{H}, \tag{178b}$$

und

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \tag{178c}$$

als „Dichte des wahren magnetischen Stromes" bezeichnet. Führt man dann noch in (177) eingeprägte magnetische Kräfte ein, wovon wir hier absehen wollen, so ist die Analogie vollkommen, nur das Vorzeichen ist in der zweiten Hauptgleichung ein anderes als in der ersten.

Diese Verschiedenheit des Vorzeichens ist eng mit dem Mechanismus der elektromagnetischen Wechselwirkungen verknüpft. Die beste Übersicht über die Vorzeichenverhältnisse wird man aus den nachstehenden vier Figuren erhalten,

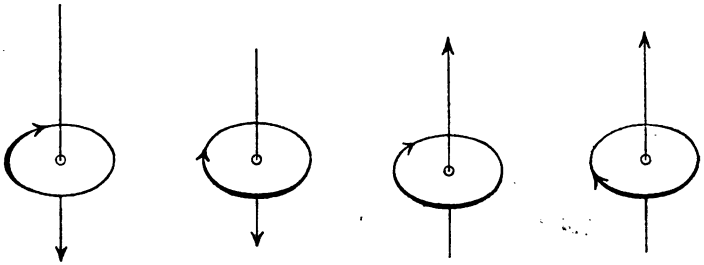


Abb. 10a, 10b, 10c, 10d.

von denen Abb. 10a die Ampèresche Schwimmregel für einen geradlinigen Strom vor Augen führt. Abb. 10b zeigt, was aus der Ampèreschen Schwimmregel für die Richtung des von einem elektrischen Kreisstrome erregten magnetischen Feldes folgt. Die Ampèresche Regel ist in der Formel (168) für das Feld eines linearen Stromes enthalten. Stromrichtung in den Leiterelementen, Radiusvektor nach dem Aufpunkt und magnetische Feldrichtung entsprechen sich wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.

Eine analoge Vorzeichenregel über die Richtung der mit einem magnetischen Strome verbundenen elektrischen Kraft liefert uns das Lenzsche Gesetz. Ihm zufolge ruft der induzierte elektrische Strom selbst eine magnetische Induktion hervor, die dem erregenden magnetischen Strome entgegen-

gesetzt gerichtet ist. Auf Grund dieses Gesetzes geht für die Richtung der mit einem geradlinigen magnetischen Strom verbundenen elektrischen Kraft Abb. 10c aus 10b, für einen magnetischen Kreisstrom Abb. 10d aus 10a hervor. Für den magnetischen Strom und die zugehörige elektrische Kraft kehrt sich also die Ampèresche Schwimmregel um. Dem entspricht das entgegengesetzte Vorzeichen in den beiden Hauptgleichungen.

Daß wir bei der Festlegung der Richtung der magnetischen Vektoren stets von rechter oder linker Hand, von Rechtsschraube oder Linksschraube reden müssen, läßt schon vermuten, daß hier axiale Vektoren eine Rolle spielen. Das ist in der Tat der Fall. Wir erkannten schon in § 24, daß der Curl eines polaren Vektors stets axialer, der Curl eines axialen Vektors stets polarer Natur ist. Nun müssen wir unbedingt annehmen, daß die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{D}$ zu derselben Art von Vektoren gehören; denn auch in isotropen Körpern ruft ein elektrisches Feld Leitungsstrom bzw. elektrische Verschiebung hervor, es kann aber nur in Körpern von schraubenartiger Struktur ein polarer Vektor einen axialen, oder ein axialer Vektor einen polaren erregen. Aus demselben Grunde müssen die beiden magnetischen Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ Vektoren derselben Art sein. Demgemäß lassen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes nur zwei Möglichkeiten offen: entweder alle elektrischen Vektoren sind polarer und alle magnetischen axialer Art; oder alle magnetischen Vektoren sind polarer, alle elektrischen axialer Art. Wir hatten bereits in § 33 die erstere Alternative bevorzugt. In der Tat wirkt im homogenen elektrischen Felde auf ein geladenes Probekügelchen eine translatorische Kraft, während eine Magnetnadel im homogenen Magnetfelde nur Drehkräften unterworfen ist. Es liegt hiernach nahe, mit Maxwell die elektrische Kraft als polar, die magnetische als axial anzusehen.

Ein bündigerer Beweis dafür, daß die erstere Alternative zutrifft, läßt sich auf Grund der Existenz des sogenannten

Hall-Effektes erbringen. In einer dünnen Metallplatte fließe ein elektrischer Strom; diesem parallel ist zunächst das elektrische Feld in der Platte gerichtet. Nun errege man ein intensives Magnetfeld, dessen Kraftlinien die Plattenebene senkrecht durchschneiden. Alsdann entsteht in der Platte ein transversales elektrisches Feld, dessen Richtung sich umkehrt, wenn entweder der Strom kommutiert oder das Magnetfeld umgekehrt wird. Nun kann ein polarer Vektor und ein axialer mit einer auf jenem senkrechten Achse sehr wohl einen dritten polaren Vektor bestimmen; denn die Richtung des letzteren kann eindeutig gekennzeichnet werden durch die Festsetzung, daß sie erhalten wird, wenn man die Richtung des ersten, polaren Vektors um einen Rechten in dem durch den zweiten, axialen Vektor festgelegten Sinne dreht. Dieser dritte Vektor wird dann sowohl bei Umkehrung der Richtung des ersten, wie auch bei Umkehrung des Drehsinnes des zweiten Vektors die Richtung umkehren. Dieser Möglichkeit entspricht der Hall-Effekt, wenn man den elektrischen Vektoren polare, den magnetischen axiale Natur zuschreibt. Hingegen ist es nicht denkbar, daß ein axialer Vektor zusammen mit einem auf ihm senkrechten polaren eindeutig den Drehungssinn um eine Achse bestimmt, die senkrecht auf der Achse des ersten und der Richtung des zweiten Vektors ist. Denn spiegelt man dieses Gebilde an der Ebene, die durch die Richtung des zweiten und die Achse des dritten Vektors geht, die mithin auf der Achse des ersten senkrecht steht, so bleibt die Richtung des zweiten und der Drehsinn des ersten unverändert, der Drehsinn des dritten aber kehrt sich um. Es ist daher nicht möglich, daß in einem isotropen Körper ein polarer Vektor zusammen mit einem axialen in der angenommenen Weise einen dritten axialen Vektor bestimmt. Das kann nur in solchen anisotropen Körpern stattfinden, in denen zwei spiegelbildlich einander entsprechende Felder nicht als gleichwertig zu betrachten sind. Es ist also mit der Existenz des Hall-Effektes in isotropen Metallen die Annahme nicht vereinbar, daß die elektrische Kraft ein axialer Vektor ist. Der Hall-Effekt entscheidet zugunsten der

ersten der beiden mit den Grundgleichungen verträglichen Möglichkeiten: die elektrischen Vektoren sind polarer, die magnetischen axialer Art.

Da die Divergenz eines polaren Vektors ein richtiger Skalar, die Divergenz eines axialen Vektors hingegen ein Pseudoskalar ist (§ 8), so haben wir die Dichte der wahren Elektrizität als Skalar im eigentlichen Sinne des Wortes zu betrachten. Die Dichte des wahren Magnetismus hingegen würde, wenn sie von Null verschieden wäre, ein Pseudoskalar sein, der beim Übergang von einem Rechtssystem zu einem Linkssystem das Vorzeichen wechselte. Der wahre Magnetismus könnte daher niemals als Maß der Menge einer Substanz oder auch nur als Maß der zeitlichen Zunahme oder Abnahme einer solchen Menge betrachtet werden. Durch diese Bemerkung wird allen Fluidumshypothesen des Magnetismus der Boden entzogen. Der Maxwellschen Theorie, welche wahren Magnetismus von vornherein als nicht existierend betrachtet, liegt allerdings die Einführung einer solchen Hypothese auch ohnedies sehr fern.

§ 60. Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper.

Die Hauptgleichungen (177a) und (178) sind zunächst nur ein allgemeines Schema; dasselbe wird erst durch Hinzufügung der Beziehungen ausgefüllt, die einerseits die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit der elektrischen Stromdichte bzw. der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$, anderseits die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ verknüpfen. Nun ist im elektrostatischen Felde nach (136)

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E},$$

ferner gilt für stationären elektrischen Strom gemäß dem Ohmschen Gesetz (153)

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E};$$

dabei sind die Dielektrizitätskonstante ε und die Leitfähigkeit σ Konstanten, die das elektrische Verhalten des betreffenden

isotropen Körpers kennzeichnen. Auch die magnetischen Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ werden (vgl. § 54) einander proportional gesetzt:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

doch ist die so definierte Permeabilität μ nur für diamagnetische und paramagnetische Körper wirklich konstant, für Eisen aber hängt sie nicht nur von dem momentanen Felde, sondern auch von der Vorgeschichte des Feldes ab. Wir schließen daher ferromagnetische Körper hier ausdrücklich aus, indem wir uns vorbehalten, im vierten Abschnitte auf dieselben zurückzukommen. Die Maxwellsche Theorie nimmt nun an, daß die Proportionalität der elektrischen Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{i}$ einerseits, der magnetischen Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ anderseits, die für statische und stationäre Felder durch die Erfahrung bestätigt wird, auch für beliebig rasch wechselnde Felder gilt. Führt man diese Annahme in die Hauptgleichungen (177a), (178) und (178a) ein, so erhält man die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper in der Heaviside-Hertzschen Form

$$\frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \mathfrak{E}, \tag{179}$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'\}, \tag{179a}$$

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0. \tag{179b}$$

Die dritte Gleichung schränkt allgemein die räumliche Verteilung des magnetischen Feldes ein. Ist die momentane Verteilung des magnetischen und des elektrischen Feldes gegeben und sind die eingeprägten elektrischen Kräfte bekannt, so bestimmen die beiden ersten Differentialgleichungen eindeutig die zeitliche Änderung des elektrischen Vektors $\mathfrak{E}$ und des magnetischen Vektors $\mathfrak{H}$ an allen Punkten des Feldes. Sie bestimmen daher die aus einem Anfangszustande des Feldes entstehenden Folgezustände.

Wir sind zu diesen Grundgleichungen der Elektrodynamik auf synthetischem Wege gelangt, indem wir von den durch die Erfahrung bestätigten Gesetzen des elektrostatischen Feldes und des magnetischen Feldes stationärer Ströme ausgingen und diese Gesetze in einer zwar hypothetischen, aber doch vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus plausiblen Weise verallgemeinerten. Ein Beweis, daß diese Gleichungen nun auch für ein jedes elektromagnetische Feld gelten, läßt sich auf Grund der auf statische und stationäre Felder bezüglichen Erfahrungen selbstverständlich nicht erbringen. Die Maxwellsche Theorie unterscheidet sich ja gerade durch die Einführung des Verschiebungsstromes in die erste Hauptgleichung wesentlich von den in dem Boden der Fernwirkung wurzelnden Theorien. Der Verschiebungsstrom ist aber der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{E}$ proportional; er wird gegenüber dem Leitungsstrome um so mehr zur Geltung gelangen, je schneller die zeitlichen Änderungen des Feldes erfolgen. Daher waren die von Heinrich Hertz entdeckten schnellen elektrischen Schwingungen für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie von so großer Bedeutung.

Der Beweis der Grundgleichungen wird nicht anders zu erbringen sein, als durch Entwickelung der Folgerungen, die sich für rasch wechselnde Felder aus ihnen ergeben. Wir werden in den folgenden Kapiteln, insbesondere im dritten Kapitel dieses Abschnittes sehen, daß sich dieselben in guter Übereinstimmung mit den Tatsachen befinden.

Die Erweiterungen, die man neuerdings der Maxwellschen Theorie gegeben hat, lassen das Schema der Hauptgleichungen (177) und (178) unverändert. Sie füllen es aber in einer etwas anderen Weise aus, indem sie die Beziehungen zwischen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und dem Leitungsstrom oder dem Verschiebungsstrom erweitern. Das erweist sich für anisotrope Körper als notwendig, sowie auch z. B. wenn man den oben erwähnten Hall-Effekt mathematisch zur Darstellung bringen will. Auch in der elektromagnetischen Lichttheorie hat man behufs der Erklärung der Dispersionserscheinungen

die einfache Proportionalität der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Verschiebung aufgegeben. Daher haben wir es zweckmäßig gefunden, hier zunächst die beiden Hauptgleichungen zu entwickeln und erst dann zu den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes herabzusteigen, welche der Maxwellschen Theorie in engerem Sinne eigentümlich sind.

Die Ausdrücke für die elektrische Feldenergie (146) und für die magnetische Feldenergie (162) konnten bisher als einigermaßen willkürlich gewählt erscheinen. Wir wollen jetzt zeigen, daß dem Energieprinzip genügt wird, wenn man die Energie eines elektromagnetischen Feldes der Summe der elektrischen Energie U und der magnetischen Energie T gleichsetzt:

(180) $$W = U + T,$$

wo

(180a) $$U = \frac{1}{2} \cdot \int dv (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) = \frac{1}{8\pi} \int dv \cdot \varepsilon \mathfrak{E}^2,$$

(180b) $$T = \frac{1}{8\pi} \cdot \int dv (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = \frac{1}{8\pi} \int dv \cdot \mu \mathfrak{H}^2.$$

Wir führen den Beweis, indem wir die zeitliche Zunahme der Größe W berechnen und uns davon überzeugen, daß sie für ein abgeschlossenes elektromagnetisches Feld der Differenz der von den elektromotorischen Kräften $\mathfrak{E}'$ geleisteten Arbeit und der pro Zeiteinheit in den Leitern entwickelten Jouleschen Wärme gleich ist. Es ist

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int dv \left\{ \left(\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{E} \right) + \left(\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \mathfrak{H} \right) \right\}.$$

Setzt man hier für $\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ und $\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ die durch die beiden ersten Feldgleichungen 179, 179a gegebenen Werte ein, so erhält man

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi} \cdot \int dv \cdot \{ (\mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}) \}$$
$$+ \frac{c}{4\pi} \cdot \int dv \cdot (\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{E}') - \int dv \, \sigma \mathfrak{E}^2.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite wird mit Hilfe der allgemeinen Formel (102a) in ein über die Begrenzungsfläche des Feldes erstrecktes Oberflächenintegral umgewandelt, nämlich in

$$-\frac{c}{4\pi}\int df[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\nu.$$

Auf Grund derselben Formel geht das zweite Integral der rechten Seite über in

$$+\frac{c}{4\pi}\int df[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}]_\nu+\frac{c}{4\pi}\int dv(\mathfrak{E}'\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}),$$

was mit Rücksicht auf (179) ergibt

$$+\frac{c}{4\pi}\cdot\int df[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}]_\nu+\int dv(\mathfrak{E}'\mathfrak{k}),$$

wenn wiederum, was hier zweckmäßig ist, die Dichte des wahren Stromes

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{i}+\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}=\sigma\mathfrak{E}+\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$$

eingeführt wird.

Das dritte Glied der rechten Seite endlich gibt die in dem ganzen Felde entwickelte Joulesche Wärme an; denn diese beträgt nach (155a)

$$Q=\int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{E})=\int dv\cdot\sigma\mathfrak{E}^2. \tag{180c}$$

Wir erhalten also schließlich

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{c}{4\pi}\int df[\mathfrak{E}-\mathfrak{E}',\mathfrak{H}]_\nu+\int dv(\mathfrak{E}',\mathfrak{k})-Q. \tag{180d}$$

Wir denken uns nun das ganze Feld in eine Fläche eingeschlossen, welche im Verlaufe des ganzen Vorganges niemals von der elektrischen bzw. der magnetischen Erregung erreicht wird und auf der keine eingeprägten Kräfte wirken. Für das von der Fläche eingeschlossene System geht (180d) über in

$$\frac{dW}{dt}=\int dv(\mathfrak{E}',\mathfrak{k})-Q. \tag{180e}$$

Das erste Glied der rechten Seite stellt die von den eingeprägten elektromotorischen Kräften $\mathfrak{E}^e$ pro Zeiteinheit im ganzen Felde geleistete Arbeit dar:

$$\frac{dA}{dt} = \int dv\,(\mathfrak{E}^e, \mathfrak{c}); \tag{180f}$$

es leisten bemerkenswerterweise nach der Maxwellschen Theorie die elektromotorischen Kräfte nicht nur dann Arbeit, wenn ein Leitungsstrom, sondern auch dann, wenn ein Verschiebungsstrom den Körper durchströmt, in dem jene Kräfte ihren Sitz haben. Die Gleichung (180e) besagt nun: Die zeitliche Zunahme, welche die durch (180) definierte Größe W erfährt, ist gleich dem Überschuß der von den eingeprägten elektrischen Kräften geleisteten Arbeit über die Joulesche Wärme. Wenn dieser Überschuß positiv ausfällt, so hat die Summe der mechanischen, thermischen und chemischen Energie abgenommen, wenn er negativ ausfällt, hat sie zugenommen. Im ersteren Falle muß nach dem Energieprinzip die Energie des elektromagnetischen Feldes entsprechend zugenommen, im letzteren muß sie entsprechend abgenommen haben. Übereinstimmung mit dem Energieprinzip kann demnach nur erzielt werden durch Annahme des Ausdruckes (180) für die elektromagnetische Energie, oder eines nur durch eine additive Konstante verschiedenen; diese additive Konstante ist bereits so gewählt, daß sie mit verschwindendem elektromagnetischen Felde verschwindet. Hieraus geht folgendes hervor. Die Annahme des Ausdruckes (180) für die elektromagnetische Feldenergie ist keine von den Grundgleichungen unabhängige Hypothese, sie ergibt sich vielmehr mit Notwendigkeit aus den Feldgleichungen (179), (179a) und aus den Ansätzen, die für die Arbeitsleistung der eingeprägten elektrischen Kräfte und die Joulesche Wärme gemacht wurden [(180f), (180c)]. Willkürlich ist nur die von der Nahewirkungstheorie über die Verteilung der Energie gemachte Annahme, daß nämlich die Energie das Feld mit der Dichte

$$\psi = \frac{1}{8\pi}\{\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2\} \tag{180g}$$

erfüllt. Doch dürfte diese Annahme kaum durch eine andere zu ersetzen sein, welche die Energiedichte nur von den gerade an dem betreffenden Punkte herrschenden Feldstärken abhängig macht; das muß der Fall sein, wenn anders die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ wirklich die physikalischen Zustände des Körpers, welche wir als elektrischen und magnetischen bezeichnen, eindeutig bestimmen. Keinesfalls aber dürfte ein einfacherer Ausdruck der Energiedichte als (180g) sich finden lassen, der dieser Forderung gerecht wird.

§ 61. Maßeinheiten und Dimensionen.

Wir erkannten im § 53, daß die verschiedenen absoluten Einheitssysteme der elektrischen Größen sich durch die Einheit und Dimension kennzeichnen ließen, welche der Dielektrizitätskonstanten ε zugeschrieben werden. Das sogenannte elektrostatische Maßsystem betrachtet ε als reine Zahl, deren Wert für den leeren Raum gleich 1 gesetzt wird. Wir wollen jetzt, nachdem wir die Verkettungsgleichungen der elektrischen und magnetischen Größen kennen gelernt haben, eine Übersicht über die verschiedenen absoluten Maßsysteme geben. In den Verkettungsgleichungen (179), (179a) kommen außer ε noch zwei Größen μ und c vor, über deren Dimension wir noch nichts ausgesagt haben; wir haben deren Dimension gerade darum zunächst unbestimmt gelassen, weil wir der Wahl des Maßsystemes nicht vorgreifen wollten. Wir wurden indessen durch das Energieprinzip dazu veranlaßt, die Konstante c in beide Hauptgleichungen aufzunehmen. Wir können jetzt auf Grund der Feldgleichungen (179), (179a) uns davon überzeugen, daß wir, welche Verfügung wir auch über die Einheiten von ε, μ, c treffen, für die elektrische und die magnetische Energiedichte die gleiche Dimension erhalten. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die beiden Feldgleichungen über Kreuz; dabei können wir das mit der Leitfähigkeit σ behaftete Glied in (179) außer acht lassen, weil wir die Dimension von σ bereits in § 53 mit der Dimension von ε in Verbindung gebracht haben. Da die Bildung des Curl der Division durch

eine Länge in bezug auf die Dimension äquivalent ist, so steht auf der einen Seite ein Ausdruck, dessen Dimension dem Quotienten aus elektrischer Energiedichte $\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2$ und dem Produkte von Länge, Zeit und c äquivalent ist; die andere Seite hingegen ist in bezug auf die Dimension dem Quotienten aus der magnetischen Energiedichte $\frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2$ und dem Produkte aus Länge, Zeit und c äquivalent. Hätten wir die universelle Konstante c nur in eine der beiden Hauptgleichungen eingeführt, so würde es unmöglich sein, beiden Energiearten die vom absoluten Maßsystem vorgeschriebene Dimension zu geben.

Das absolute Maßsystem legt aber den zu wählenden Dimensionen noch eine weitere Einschränkung auf. Wir erkennen dieses, indem wir die linken und rechten Seiten der Feldgleichungen miteinander multiplizieren (der Leitungsstrom mag dabei wieder gestrichen werden, weil seine Dimension allgemein derjenigen des Verschiebungsstromes gleich gemacht ist). Dann heben sich die Dimensionen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ heraus und man erhält

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = L \cdot T^{-1}. \tag{181}$$

Die hier auftretende Verbindung der drei Konstanten c, ε, μ hat demnach die Dimension einer Geschwindigkeit. Es ist, wie hier vorweg bemerkt werden mag, die Geschwindigkeit, mit der sich elektromagnetische Störungen in dem betreffenden Isolator fortpflanzen (vgl. § 69). Es dürfen also nur zweien der drei Konstanten willkürliche Dimensionen beigelegt werden, die Dimension der dritten ist dann durch (181) festgelegt. Das allgemeinste absolute Maßsystem der elektrischen und magnetischen Größen müßte also die Dimension zweier der drei Konstanten unbestimmt lassen.

Man hat es indessen vorgezogen, das Maßsystem nicht sowohl möglichst allgemein zu lassen, als vielmehr es so einfach zu gestalten, als es für den ins Auge gefaßten Zweck zulässig war. Dabei sind nun verschiedene Auffassungen möglich. Entweder man wünscht, in den Dimensionen den Unterschied von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ hervortreten zu lassen,

so daß man etwa in einem gegebenen Falle kontrollieren kann, ob die Einführung von wahrer und freier Elektrizität, von wahrem und freiem Strome in eine Gleichung die angemessene ist. Dann wird man ε und μ eine Dimension geben und wird nur c als reine Zahl betrachten, deren Wert man dann konsequenterweise gleich 1 setzt. Dieser Auffassung entsprechen die beiden ersten Spalten der beigegebenen Dimensionstafel. In der ersten Spalte ist die Dimension von ε, in der zweiten diejenige von μ unbestimmt gelassen.

Vernachlässigt man in der ersten Spalte der Tafel die Dimension von ε, so gelangt man zu den Angaben des elektrostatischen Maßsystemes. Dieses setzt den Zahlwert von c gleich 1 und schreibt c wie ε die Dimension Null zu; daher muß es, gemäß (181), μ die Dimension $L^{-2}T^2$ geben.

Streicht man in der zweiten Spalte die Dimension von μ, so erhält man die Angaben des elektromagnetischen Maßsystemes. Dieses setzt gleichfalls den Zahlwert von c gleich 1 und schreibt c wie μ die Dimension Null, mithin ε die Dimension $L^{-2}T^2$ zu.

Man kann von der ersten Spalte zur zweiten übergehen, indem man für die Dimension von ε in die erste Spalte den Wert einführt, der ihm in der zweiten Spalte zukommt. Umgekehrt gelangt man von den Angaben der zweiten Spalte zu denen der ersten, indem man die Dimension von μ durch diejenige von ε ausdrückt. Dabei gehen dann stets ganzzahlige Potenzen einer Geschwindigkeit ein. So kommt es, daß die Dimensionen des elektrostatischen und elektromagnetischen Systemes, die man durch Unterdrückung von ε bzw. μ in der ersten bzw. zweiten Spalte erhält, sich durch ganzzahlige Potenzen einer Geschwindigkeit unterscheiden. Man hat z. B., um eine elektromagnetisch gemessene Stromstärke auf elektrostatisches Maß umzurechnen, mit einer Geschwindigkeit zu multiplizieren; diese Geschwindigkeit hat man experimentell gleich $3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ gefunden. Die gleiche Geschwindigkeit bzw. eine ganze positive oder negative Potenz derselben tritt bei der Umrechnung der anderen Größen auf.

Tafel der Dimensionen.

	Ausgedrückt in ε	Ausgedrückt in μ	Gaußsches System
Dielektrizitätskonstante ε	ε	$L^{-2} T^{2} \mu^{-1}$	0
Permeabilität μ	$L^{-2} T^{2} \varepsilon^{-1}$	μ	0
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Magnetische Induktion $\mathfrak{B}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
Wahre Elektrizitätsmenge e	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte derselben ϱ	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Freie Elektrizitätsmenge e'	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte derselben ϱ'	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Wahrer Magnetismus (nicht vorhanden)	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte desselben ϱ_m	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$

Freier Magnetismus	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte desselben ϱ'_m	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Potential der freien Elektrizität φ = elektromotorische Kraft E	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Potential des freien Magnetismus ϱ_m = magnetomotorische Kraft	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrischer Strom J	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Wahre Stromdichte $\mathfrak{i}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Freie Stromdichte $\mathfrak{i}'$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Vektorpotential des freien Stromes $\mathfrak{A}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \mu^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrische Leitfähigkeit σ	$T^{-1} \varepsilon$	$L^{-2} T \mu^{-1}$	T^{-1}
Widerstand R	$L^{-1} T \varepsilon^{-1}$	$L T^{-1} \mu$	$L^{-1} T$
Kapazität K	$L \varepsilon$	$L^{-1} T^2 \mu^{-1}$	L
Selbstinduktion L	$L^{-1} T^2 \varepsilon^{-1}$	$L \mu$	L
Universelle Konstante c	0	0	$L \cdot T^{-1}$

Während in diesen Systemen entweder die elektrischen oder die magnetischen Größen bevorzugt werden, werden in dem Gaußschen Maßsysteme elektrische und magnetische Größen paritätisch behandelt. Es werden nämlich die Konstanten ε und μ beide als reine Zahlen betrachtet, wodurch dann c nach (181) die Dimension einer Geschwindigkeit erhält, deren Zahlwert gleich 3×10^{10} ist. Elektrische und magnetische Feldstärke werden hier beide gleich der Wurzel aus einer Energiedichte, wahre und freie Elektrizität werden dimensionsgleich, ebenso wahrer und freier Strom. Die Dimensionen dieses auch von H. Hertz zugrunde gelegten Maßsystemes finden sich in der dritten Spalte der Tabelle. Der von den neueren Weiterbildungen der Maxwellschen Theorie gemachten Annahme, daß das elektromagnetische Feld eigentlich als Feld im Äther zu betrachten ist, das nur durch die in der Materie enthaltene Elektrizität bzw. durch deren Bewegung modifiziert wird, paßt sich dieses Dimensionssystem am besten an. Denn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ werden hier wesensgleich, ε und μ sinken daher zum Range dimensionsloser Größen herab, deren Zahlwert für den Äther gleich 1 gesetzt wird. Dieses Gaußsche Maßsystem wird daher den weiteren Entwickelungen zugrunde gelegt werden.

Zweites Kapitel.

Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

§ 62. Die Anwendung des Vektorpotentiales in der Elektrodynamik.

Wir stellen uns in diesem Kapitel die Aufgabe, den zeitlichen Verlauf elektrischer Ströme in ruhenden Leitern zu untersuchen. Den im vorigen Kapitel entwickelten Anschauungen gemäß haben wir uns die Wechselwirkung zweier elektrischer Ströme folgendermaßen vorzustellen. Der erste Strom erzeugt, der ersten Hauptgleichung entsprechend, ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$. Dieses gibt zu einem Induktionsflusse

durch den zweiten Leiter Veranlassung, der wesentlich von der Permeabilität der im Felde befindlichen Körper abhängt. Solange als der Induktionsfluß durch den zweiten Leiter konstant ist, beeinflußt er den daselbst zirkulierenden Strom nicht; ändert sich aber der Induktionsfluß, d. h. die Zahl der vom zweiten Leiter umschlungenen Induktionslinien, so wird in diesem Leiter eine elektromotorische Kraft induziert. Das Linienintegral der induzierten elektromotorischen Kraft ist nach dem Induktionsgesetze (vgl. § 59) für einen ruhenden Leiter

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i_s ds = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int df \mathfrak{B}_n, \tag{182}$$

wenn s die Leitlinie des geschlossenen Stromkreises, f die umrandete Fläche bedeutet.

Nun läßt sich der stets quellenfreie Vektor $\mathfrak{B}$ als Curl des Vektorpotentiales $\mathfrak{A}$ darstellen. Wir haben in den §§ 56 und 58 gelernt, für ein stationäres magnetisches Feld das Vektorpotential zu berechnen, wenn die Stromverteilung bzw. die Magnetisierung der Körper bekannt war. Nach dem Stokesschen Satze (§ 25) erhalten wir den Induktionsfluß

$$\int \mathfrak{B}_n df = \int \operatorname{curl}_n \mathfrak{A} df = \int \mathfrak{A}_s ds, \tag{182a}$$

und somit für die längs der geschlossenen Leitlinie integrierte elektromotorische Kraft (182)

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{A}_s ds. \tag{182b}$$

Die in einem geschlossenen Stromkreise induzierte elektromotorische Integralkraft ist proportional der zeitlichen Abnahme des längs der Leitlinie des Stromkreises erstreckten Linienintegrales des Vektorpotentiales.

Die in den §§ 56 und 58 gegebene Berechnung des Vektorpotentiales war, wie erwähnt, auf das Feld stationärer elektrischer Ströme beschränkt, indem die erste Hauptgleichung in der Form (169) zugrunde gelegt wurde. Für den Fall,

daß die Permeabilität μ im ganzen Raume konstant ist, ließ sich das Vektorpotential durch Integration über das ganze Feld der quellenfreien Strömung $\mathfrak{i}$ berechnen (Gleichung 170). Jetzt haben wir es indessen nicht mit einem stationären, sondern mit einem veränderlichen Strome zu tun. Hier ist streng genommen der Leitungsstrom $\mathfrak{i}$ nicht quellenfrei, er wird erst durch den Verschiebungsstrom zu einer quellenfreien Strömung ergänzt. Der erweiterten ersten Hauptgleichung (177) gemäß ist hier das Vektorpotential nicht aus dem Leitungsstrome $\mathfrak{i}$, sondern aus dem wahren Strome $\mathfrak{c}$ zu berechnen. Tut man dieses, so kann man an der bisherigen Definition des Vektorpotentiales (§ 26) festhalten, als eines Vektors, dessen Divergenz gleich Null ist und dessen Komponenten der Laplaceschen bzw. der Poissonschen Gleichung genügen. Man kann so die bisherige Entwickelung formal auf das Feld beliebig rasch wechselnder Ströme übertragen, indem nur neben dem Leitungsstrome der Verschiebungsstrom berücksichtigt wird. Hierbei verliert indessen die Lösung ihre einfache physikalische Bedeutung; denn der Verschiebungsstrom ist nicht auf den Leiter beschränkt, sondern er erfüllt den ganzen umgebenden Isolator; auch ist seine Verteilung nicht bekannt, so daß dieser Ausdruck des Vektorpotentiales sich gar nicht auswerten läßt. Man ist also nicht imstande, auf Grund dieses Ausdruckes das Vektorpotential und, mit Hilfe der Gleichung (182b), die in einem benachbarten Leiter induzierte elektromotorische Integralkraft zu berechnen, wenn man es mit hochfrequenten Wechselströmen zu tun hat.

Es ist ja auch ohne weiteres einleuchtend, daß die Ausbreitung der von einem solchen Strome ausgehenden elektromagnetischen Erregung sich nicht durch Potentialausdrücke darstellen lassen wird. Denn diese Ausdrücke machen das Feld im Aufpunkte von den gleichzeitigen Zuständen in den Quellpunkten der Erregung abhängig, sie berücksichtigen nicht, daß die Störung nach unserer Theorie Zeit gebraucht, um vom Quellpunkte zum Aufpunkte zu gelangen. Für die allgemeine Theorie des elektromagnetischen Feldes ist das

Vektorpotential in der bisherigen Form ebensowenig verwertbar, wie das skalare Potential der Elektrostatik. Es wurde daher ein wesentlicher Fortschritt der Elektrodynamik durch die von Heaviside und Hertz vollzogene Elimination der Vektorpotentiale aus den Maxwellschen Grundgleichungen angebahnt.

Man kann allerdings die Potentiale für die Theorie rasch veränderlicher Felder verwertbar machen, indem man die Zeit der Ausbreitung in Rechnung zieht, also eine gewisse „Latenszeit" einführt. Doch genügen die so abgeänderten Ausdrücke nicht mehr der Laplaceschen Gleichung, sondern der sogenannten Wellengleichung, die im ersten Abschnitte gegebenen Definitionen des skalaren und des Vektorpotentiales sind demgemäß wesentlich zu modifizieren, wenn man jenen Ausdrücken diese Benennung beizulegen wünscht. Wir werden jedenfalls in dem ersten Bande dieses Werkes, der bisherigen Definition gemäß, das skalare Potential und das Vektorpotential aus den gleichzeitigen Ladungen und Strömen berechnen.

Wenn wir nun trotzdem in diesem Kapitel mit dem Vektorpotentiale operieren, so schränken wir den Gültigkeitsbereich der Entwickelungen von vornherein sehr wesentlich ein. Wir beschränken ihn auf solche Fälle, wo der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom zu vernachlässigen ist. Wir beseitigen also gerade dasjenige, was die Maxwellsche Theorie von den in dem Boden der Fernwirkungsvorstellung wurzelnden Theorien trennt und können daher nicht hoffen, irgend ein Kriterium zu finden, welches die Maxwellsche Theorie von den Fernwirkungstheorien sondert. In den Gültigkeitsbereich der Entwickelungen dieses Kapitels fallen nur solche Systeme veränderlicher Ströme, deren Änderungszeit (Schwingungsdauer bei Wechselströmen) groß ist gegen die Zeit, welche die elektromagnetischen Störungen gebrauchen, um den Abstand zwischen den beiden entferntesten Punkten des Systemes zu durchmessen. Solche Ströme werden wir als quasistationär bezeichnen. Wir berechnen das magnetische

Feld quasistationärer Ströme und dessen Energie so, als ob der Strom stationär wäre und bestimmen aus dem so berechneten Felde die Induktionswirkungen. Ob wir in einem gegebenen Falle so verfahren dürfen, das hängt, wie erwähnt, erstens von der Frequenz der Ströme ab, und zweitens von ihrem Abstande. Auf dem Gebiete des gewöhnlichen Wechselstromes hat sich die mit quasistationärem Strome operierende Theorie gut bewährt, bei den hochfrequenten Störungen indessen, mit denen die drahtlose Telegraphie arbeitet, versagt diese Theorie vielfach.

§ 63. Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme.

Wir denken uns zwei Stromringe, deren Entfernung so gering ist, daß den Bedingungen genügt wird, welche die Theorie der quasistationären Strömung stellt, und doch so groß, daß der kleinste Abstand der beiden Leiter groß gegen den Querschnittsradius eines jeden ist. Alsdann kann für die in der Nachbarschaft des zweiten Leiter liegenden Aufpunkte der erste Leiter als linear betrachtet werden und umgekehrt; für die gegenseitigen Induktionswirkungen kommen dann nicht die Querschnittsdimensionen, sondern nur die Leitlinien $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ der beiden Stromringe bzw. deren gegenseitige Lage in Betracht.

Es sei J_1 der im ersten Leiter zirkulierende, etwa durch eingeprägte Kräfte unterhaltene Strom; nach Gleichung (168a) leitet sich das magnetische Feld bzw. die magnetische Induktion aus dem Vektorpotentiale ab:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu J_1}{c} \cdot \int \frac{d\mathfrak{s}_1}{r}. \tag{183}$$

Dieser Gleichung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß im ganzen Raume die Permeabilität die gleiche ist; diese Voraussetzung wollen wir zunächst festhalten.

Da wir nun im vorigen Paragraphen gelernt haben, den Induktionsfluß direkt durch das Linienintegral des Vektorpotentiales auszudrücken, so können wir uns die Berechnung

des Vektors $\mathfrak{B}$ ersparen. Die Gleichung (182a) ergibt als Induktionsfluß, den der erste Leiter durch den zweiten sendet

$$\int \mathfrak{B}_2 df_2 = \int \mathfrak{A}_{1_2} ds_2 = \int (\mathfrak{A}_1, d\mathfrak{s}_2).$$

Führt man hier den Ausdruck (183) des Vektorpotentiales $\mathfrak{A}_1$ ein, so erhält man als Induktionsfluß, den der im ersten Leiter zirkulierende Strom J_1 durch eine vom zweiten Leiter begrenzte Fläche sendet

$$\frac{1}{c} \cdot L_{12} \cdot J = J_1 \cdot \frac{\mu}{c} \int\int \frac{d\mathfrak{s}_1, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}. \tag{183a}$$

Der hierbei auftretende Koeffizient von J_1

$$L_{12} = \mu \cdot \int\int \frac{d\mathfrak{s}_1, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} \tag{183b}$$

wird Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden linearen Leiter genannt. Er ist der Permeabilität des raumerfüllenden Körpers proportional, hängt aber im übrigen nur von der Form der beiden Leitlinien und ihrer gegenseitigen Lage ab. Es ist, behufs Auswertung des Ausdruckes für L_{12}, das Produkt aus je zwei Linienelementen der beiden linearen Leiter und dem Cosinus des von den Stromrichtungen in den beiden Elementen eingeschlossenen Winkels η

$$ds_1 \cdot ds_2 \cos \eta = d\mathfrak{s}_1 \cdot d\mathfrak{s}_2$$

durch den Abstand der beiden Elemente zu dividieren und sodann über alle Kombinationen je zweier solcher Elemente zu integrieren. Da das Resultat dieser Operationen offenbar unabhängig davon ist, welchen Leiter man als ersten und welchen man als zweiten bezeichnet, so ist

$$L_{12} = L_{21}. \tag{183c}$$

Dabei ist der Induktionsfluß, den ein im zweiten Stromring zirkulierender Strom J_2 durch den ersten sendet

$$\frac{1}{c} L_{21} J = J_2 \cdot \frac{\mu}{c} \int\int \frac{d\mathfrak{s}_1, d\mathfrak{s}_2}{r_{21}}. \tag{183d}$$

Die Dimension des Induktionskoeffizienten ist gleich dem Produkte von Länge und Dimension der Permeabilität. In der Dimensionstafel des § 61 ist dies bereits berücksichtigt und für μ in jeder der drei Spalten der betreffende Dimensionsausdruck eingeführt worden. Im Gaußschen System z. B., wo μ eine reine Zahl ist, wird L_{12} eine Länge.

Wenn wir nun die Induktionswirkungen in dem betrachteten Systeme zweier quasistationärer elektrischer Ströme erschöpfend darstellen wollen, so haben wir in Betracht zu ziehen, daß durch eine von der Leitlinie des zweiten Stromkreises umrandete Fläche nicht nur der erste Strom, sondern auch der zweite Strom selbst Induktionslinien hindurchsendet. Eine elektromotorische Kraft wird daher in jedem der beiden Leiter nicht nur dann induziert, wenn die Stromstärke in dem anderen, sondern auch, wenn die Stromstärke in dem betreffenden Leiter selbst sich ändert. Der gegenseitigen Induktion tritt daher die Selbstinduktion an die Seite.

Bei der Definition des Koeffizienten der Selbstinduktion tritt nun eine Schwierigkeit auf. Zunächst ist bei der Bestimmung des Vektorpotentiales in den Punkten eines Leiters der in dem Leiter selbst zirkulierende Strom nicht als linearer Strom zu betrachten, da die Entfernung je zweier Leiterelemente durchaus nicht immer groß gegen die Querschnittsdimensionen ist. Das magnetische Feld in der Nachbarschaft des Stromes und der Induktionsfluß, den er durch sich selbst hindurchsendet, hängt daher auch wesentlich von der Gestalt des Querschnittes ab. Außerdem ist die Wahl der Leitlinie, die das von den Induktionslinien durchsetzte Flächenstück begrenzen soll, mit einiger Willkür verbunden. Behufs eindeutiger Festlegung des Koeffizienten der Selbstinduktion müssen wir anders verfahren.

Wir gehen zurück auf den Ausdruck (170b), auf den wir die magnetische Energie eines stationären Stromsystemes gebracht hatten und der ganz allgemein gilt

$$T = \frac{1}{2c} \cdot \int dv (\mathfrak{i}\mathfrak{A}). \tag{184}$$

Wir wollen das Stromfeld in Stromfäden zerlegen und einen einzelnen Stromfaden betrachten; es ist das Volumen eines Elementes des Stromfadens

$$dv = q \cdot ds,$$

wo q den Querschnitt, ds die Länge des Stromelementes bedeutet. Der Beitrag, den dieses Element zur magnetischen Energie beisteuert, ist gleich

$$\frac{1}{2c} \cdot q \cdot |\mathfrak{i}| \cdot \int ds \cdot \mathfrak{A}_s.$$

Dabei bedeutet $q \cdot |\mathfrak{i}|$ die Stromstärke des Fadens,

$$\int ds \mathfrak{A}_s$$

den Induktionsfluß durch eine von dem Faden umrandete Fläche. Um die magnetische Energie des Stromsystemes zu berechnen, hat man für jeden Stromfaden das Produkt aus Stromstärke und umschlungenem Induktionsfluß zu bilden, über alle Stromfäden zu integrieren und das Integral durch 2c zu dividieren.

Wir wenden dieses Ergebnis auf unser Problem an, indem wir den Induktionsfluß in zwei Teile zerlegen, den vom ersten und den vom zweiten Strome erzeugten. Der vom ersten Strome erzeugte Induktionsfluß ist für alle Stromfäden des zweiten Stromes merklich der gleiche, da wir ja die Entfernung groß gegen die Querschnittsabmessungen annahmen. Der zweite Stromring ist hier als Stromfaden anzusehen und der entsprechende Energieanteil gleich

$$\frac{1}{2c} \cdot J_2 \cdot \frac{1}{c} L_{12} \cdot J = \frac{1}{2c^2} \cdot L_{12} J_1 J_2$$

zu setzen.

Entsprechend ergibt der vom zweiten Strom durch den ersten gesandte Induktionsfluß einen Energieanteil

$$\frac{1}{2c} \cdot J_1 \cdot \frac{1}{c} L_{21} J = \frac{1}{2c^2} \cdot L_{21} \cdot J_2 \cdot J_1.$$

Die Summe der beiden von der wechselseitigen Induktion der beiden Ströme herrührenden Energieanteile ist nach (183c)

$$T_{12} = \frac{L_{12}}{c^2} \cdot J_1 \cdot J_2. \tag{184a}$$

Hierzu treten diejenigen Energieanteile, welche von dem Induktionsfluß herrühren, den jeder der beiden Ströme durch seine eigenen Stromfäden hindurchsendet. Diese Anteile bezeichnen wir mit T_{11}, T_{22} und erhalten

$$T = T_{11} + T_{12} + T_{22}. \tag{184b}$$

T_{11} ist von der Anwesenheit des zweiten Stromes ganz unabhängig. Es hängt nur von dem ersten Strome ab. Steigert man dessen Stromstärke J_1, so nimmt T_{11} dem Quadrate von J_1 proportional zu. Denn es wachsen die Stromstärken aller der einzelnen Fäden und daher auch die Induktionsflüsse alle wie J_1. Setzen wir

$$T_{11} = \frac{1}{2} \frac{L_{11}}{c^2} \cdot J_1^2, \tag{184c}$$

so ist L_{11} eine mit L_{12} dimensionsgleiche Größe, welche nur von der Beschaffenheit des ersten Leiters abhängt, übrigens aber der Permeabilität proportional ist, die innerhalb und außerhalb des Leiters durchweg den gleichen Wert besitzen mag. Wir nennen L_{11} den Selbstinduktionskoeffizienten des ersten Leiters.

Führt man in (184) den Ausdruck (170) des Vektorpotentiales ein, so erhält man für die Energie eines einzelnen Stromkreises

$$T = \frac{\mu}{2c^2} \cdot \int \frac{dv'}{r} \int dv'' (\mathfrak{i}', \mathfrak{i}'').$$

'Dabei bezeichnen dv', dv'' je zwei in der Entfernung r voneinander befindliche Volumelemente des Stromkreises. Jede Kombination zweier Volumelemente kommt zweimal vor, einmal nämlich steuert das eine, das andere Mal das andere seinen Beitrag zum Vektorpotential bei. Nimmt man jede Kombination nur einmal, so ist zu setzen

$$T = \frac{\mu}{c^2} \cdot \iint \frac{dv'\, dv''}{r} (\mathfrak{i}', \mathfrak{i}''). \tag{184d}$$

Ist J die Stromstärke dieses Kreises, so ist der Selbstinduktionskoeffizient L gemäß (184c) zu definieren durch

$$\frac{1}{2c^2} L J^2 = \frac{\mu}{c^2} \cdot \int\int \frac{dv'\, dv''}{r} (\mathfrak{i}', \mathfrak{i}''). \tag{184e}$$

Der Quotient L/μ hängt nur von der Beschaffenheit des Leiters ab; denn die Stromverteilung ist — wofern sie mit der Verteilung des stationären Stromes übereinstimmt — von der Stromstärke unabhängig, die Quotienten $\mathfrak{i}'/J$, $\mathfrak{i}''/J$ haben demnach Beträge und Richtungen, die nur von der geometrischen und physikalischen Beschaffenheit des Stromkreises, nicht aber von der Stromstärke J abhängen. Hat man es mit einem durchweg homogenen Leiter zu tun, dessen Permeabilität gleich 1 ist und der sich im Luftraume befindet, so ist L durch die geometrische Form des Leiters allein bestimmt. Dabei kommt nicht nur die Form der Leitlinie, sondern auch diejenige des Querschnittes in Betracht. Bei schnellen elektrischen Schwingungen allerdings kann, auch wenn im übrigen die Voraussetzungen der quasistationären Strömung erfüllt sind, die Stromverteilung von derjenigen des stationären Stromes abweichen. Alsdann hängt auch L von der Frequenz der Schwingungen ab. Doch würde es hier zu weit führen, wenn wir auf diese Fragen eingehen wollten. Für langsame Stromschwankungen ist der Selbstinduktionskoeffizient eines Stromringes nunmehr eindeutig durch die magnetische Energie definiert.

Zu unserem Systeme zweier Stromringe zurückkehrend, erhalten wir für die gesamte magnetische Energie

$$T = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right\}. \tag{185}$$

Hat man es mit dem ersten Strome allein zu tun, so ist die Abnahme der Stromstärke J_1 mit einer Energieabnahme verbunden

$$-\frac{dT_{11}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2\right\} = -\frac{L_{11}}{c^2} \cdot J_1 \cdot \frac{dJ_1}{dt}.$$

Diese Energieabnahme muß der Arbeitsleistung der induzierten elektromotorischen Kräfte äquivalent sein; da die Arbeit der induzierten Integralkraft E_{11}^i gleich $J_1 E_{11}^i$ ist, so erhält man

$$J_1 \cdot E_{11}^i = -\frac{L_{11}}{c^2} J_1 \frac{dJ_1}{dt},$$

daher

$$E_{11}^i = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{L_{11} J_1}{c^2}\right\}. \tag{185a}$$

Treten aber außerdem Stromschwankungen im zweiten Leiter ein, so erhält man nach (183d) eine zeitliche Änderung des Induktionsflusses, den der zweite Stromring durch den ersten sendet. Dieselbe beträgt

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{L_{21} J_2}{c}\right\},$$

und nach dem Induktionsgesetz (§ 59) wird die induzierte elektromotorische Integralkraft

$$E_{21}^i = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{L_{21} J_2}{c^2}\right\}. \tag{185b}$$

Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion (185a) entspricht also durchaus derjenigen der gegenseitigen Induktion (185b), obwohl wir behufs ihrer eindeutigen Definition auf den Ausdruck (184e) für die Energie eines Stromringes zurückgehen mußten, und obwohl es bei der Berechnung des Koeffizienten der Selbstinduktion nicht gestattet ist, den Stromring als Stromlinie zu betrachten. Mithin können wir das Resultat jetzt so deuten, daß wir für den gesamten Induktionsfluß, der von einem passend gewählten Stromfaden des ersten Ringes umschlungen wird, setzen

$$\frac{1}{c^2}\{L_{11} J_1 + L_{12} J_2\} \tag{185c}$$

und entsprechend für den Induktionsfluß, der von einem passend gewählten Stromfaden des zweiten Ringes umschlungen wird

$$\frac{1}{c^2}\{L_{12} J_1 + L_{22} J_2\}. \tag{185d}$$

Für die in den beiden Leitern induzierten elektromotorischen Integralkräfte erhält man alsdann

$$E_1^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\{L_{11}J_1 + L_{12}J_2\}, \tag{185e}$$

$$E_2^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\{L_{12}J_1 + L_{22}J_2\}. \tag{185f}$$

Die hierbei auftretenden Induktionskoeffizienten sind identisch mit den Koeffizienten des Energieausdruckes (185).

Wir haben uns bei der Berechnung der Induktionskoeffizienten auf den Fall durchweg konstanter Permeabilität beschränkt. Diese Einschränkung war indessen nur zur Ableitung der Formeln (183b), (184e) erforderlich, welche die Induktionskoeffizienten bzw. die magnetische Energie auf eine Form bringen, die mehr der Fernwirkungstheorie als der Nahewirkungstheorie angepaßt ist. Es leuchtet ein, daß diese Ausdrücke abzuändern sind, wenn ein Körper abweichender Permeabilität in das Feld gebracht wird. Denn dieser Körper verändert den Verlauf der Induktionslinien und den Betrag der magnetischen Feldenergie. Anderseits ist klar, daß dem Ausdruck (185) der magnetischen Energie eine allgemeinere Gültigkeit zukommt; denn die magnetische Energie des Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi}\int dv\mu\mathfrak{H}^2$$

kann stets — wofern μ von der Feldstärke unabhängig ist — in drei Teile zerlegt werden

$$T = \frac{1}{8\pi}\cdot\left\{\int dv\mu\mathfrak{H}_1^2 + 2\int dv\mu\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 + \int dv\mu\mathfrak{H}_2^2\right\},$$

wo $\mathfrak{H}_1$ die vom ersten, $\mathfrak{H}_2$ die vom zweiten Strome erregte magnetische Kraft ist. Da aber die Grundgleichungen linear sind, so ist $\mathfrak{H}_1$ proportional J_1, $\mathfrak{H}_2$ proportional J_2; mithin ist der erste Teil der magnetischen Energie proportional zu J_1^2, der zweite zu J_1J_2, der dritte zu J_2^2. Damit ist bewiesen, daß die magnetische Feldenergie stationärer Ströme sich stets als Funktion zweiten Grades der Stromstärken darstellen lassen muß, deren Koeffizienten von der Beschaffenheit und Form

der im Felde befindlichen Körper abhängen, von den Stromstärken aber unabhängig ist. Diese Schlußweise versagt nur bei ferromagnetischen Körpern; hier hängt μ von der Feldstärke ab; es sind daher auch die Grundgleichungen nicht linear; endlich ist auch (vgl. § 56) der zugrunde gelegte Energieausdruck bei diesen Körpern abzuändern.

Es mag nochmals ausdrücklich bemerkt werden, daß die Anwendung des Energieausdruckes (185) quasistationäre Strömung voraussetzt; denn die Energie ist von den gleichzeitigen Werten der Stromstärken abhängig gemacht, sie ist der Energie des stationären Stromes gleichgesetzt worden. Die Anwendung auf veränderliche Ströme zur Bestimmung der Induktionswirkungen unterliegt daher den im vorigen Paragraphen angeführten Einschränkungen.

§ 64. Der elektrische Strom als zyklisches System. Die Lagrangeschen Gleichungen.

Die Entwickelungen des letzten Paragraphen können in gewisser Hinsicht einen unbefriedigenden Eindruck hinterlassen; insofern nämlich, als zwar die Selbstinduktion aus dem Energieprinzip, die gegenseitige Induktion aber aus dem Faradayschen Induktionsgesetz hergeleitet wurde. Man wird wünschen, die Selbstinduktion und die gegenseitige Induktion aus einem und demselben Prinzipe herzuleiten. Das Energieprinzip kann dieses nicht leisten; denn, wie aus der Mechanik bekannt ist, führt es nur für ein System von einem Freiheitsgrade zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Nun gibt aber die analytische Mechanik eine Methode an die Hand, welche es gestattet, aus dem Ausdrucke der kinetischen Energie ohne weiteres die Bewegungsgleichungen eines Systemes von beliebig vielen Freiheitsgraden herzuleiten. Dieses leisten die im § 15 des ersten Abschnittes hergeleiteten Lagrangeschen Gleichungen. Wir wollen diese Gleichungen als heuristisches Prinzip verwenden; es zeigt sich, daß sie auch in der Elektrodynamik zu Ergebnissen führen, die mit der Erfahrung übereinstimmen.

Wir nehmen demgemäß an, daß in dem Felde eines elektrischen Stromes irgendeine unseren Sinnen verborgene Bewegung vor sich geht. Das war in der Tat eine der Arbeitshypothesen, von denen Maxwell sich leiten ließ. Entsprechend der Nahewirkungsvorstellung soll diese Bewegung nicht auf die Stromleiter beschränkt sein, sondern sie soll den umgebenden Raum erfüllen. Ihre lebendige Kraft ist die magnetische Energie, die von Maxwell daher auch als elektrokinetische Energie bezeichnet worden ist. Für stationäre und quasistationäre Ströme ist die lebendige Kraft der verborgenen Bewegung durch (185) als Funktion zweiten Grades der Stromstärken gegeben. Ihre Koeffizienten hängen von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Stromleiter ab.

Der elektrische Strom gehört, vom Standpunkte dieses mechanischen Bildes aus betrachtet, einer Klasse von Bewegungen an, welche von Helmholtz als zyklische Bewegungen bezeichnet worden sind. Die Parameter, welche die augenblickliche Lage eines zyklischen Systemes kennzeichnen, lassen sich in zwei Gruppen bringen. Die Parameter der einen Gruppe ändern sich während der Bewegung gar nicht oder doch so langsam, daß die ihren Änderungsgeschwindigkeiten entsprechenden Glieder im Ausdrucke der lebendigen Kraft zu vernachlässigen sind. Diese Parameter gehen mithin zwar selbst im allgemeinen in den Ausdruck der lebendigen Kraft ein, aber nicht ihre Differentialquotienten nach der Zeit. Dieser ersten Gruppe gehören in dem vorliegenden Falle diejenigen Parameter an, welche die Lage der Stromkreise bestimmen. Die Parameter der zweiten Gruppe hingegen, die wir Koordinaten der zyklischen Bewegung nennen wollen, kommen zwar selbst nicht im Ausdrucke der lebendigen Kraft vor, wohl aber ihre Differentialquotienten nach der Zeit, die zyklischen Geschwindigkeiten. In unserem Falle können als zyklische Geschwindigkeiten die Stromintensitäten J_1, J_2 gewählt werden; die zyklischen Koordinaten sind dann deren Integrale nach der Zeit, von einem bestimmten Zeitpunkte an gerechnet, d. h. die Elektrizitätsmengen, die seitdem durch die Querschnitte der beiden Leiter hindurchgeströmt

sind; dieselben gehen nicht in den Ausdruck der lebendigen Kraft ein.

Ein anderes Beispiel für eine zyklische Bewegung ist eine inkompressible Flüssigkeit, die in einer geschlossenen Röhre strömt und dieselbe ganz erfüllt. Hier tritt bei der zyklischen Bewegung immer ein Teilchen an die Stelle des anderen, indem es dessen Geschwindigkeit annimmt. Die lebendige Kraft hängt daher von der Lage der einzelnen Flüssigkeitsteilchen nicht ab; sie ist bei gegebener Form der Röhre bestimmt durch die Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde die Querschnitte durchströmt. Dieses ist hier die zyklische Geschwindigkeit. Ein solches System mit nur einer zyklischen Koordinate wird als Monozykel bezeichnet. In dem hydrodynamischen Beispiele können wir von der mechanischen Bedeutung der zyklischen Geschwindigkeit Rechenschaft geben. Im Falle des elektrischen Stromes ist dieses nicht ohne neue, das mechanische Bild genauer zeichnende Hypothesen möglich. Bei der Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen brauchen wir indessen die zyklische Bewegung nicht genauer zu beschreiben; es kommt nur auf den Ausdruck der lebendigen Kraft T an; aus diesem können wir alles ableiten, was der Wahrnehmung zugänglich ist, nämlich die elektromotorischen und die ponderomotorischen Kräfte.

Das zyklische System, auf welches wir die Lagrangeschen Gleichungen anwenden wollen, hat zwei zyklische Koordinaten p_1, p_2, es wird daher als Bizykel bezeichnet. Die entsprechenden zyklischen Geschwindigkeiten q_1, q_2 sollen mit den Stromintensitäten identisch sein. Die entsprechenden verallgemeinerten Kraftkomponenten sind die elektromotorischen Kräfte, die beim Durchgang der Elektrizität Arbeit leisten. In § 15 sind die von außen her wirkenden Kräfte mit P_1, P_2 bezeichnet worden; zu ihnen sind die eingeprägten elektromotorischen Kräfte und die reibungsartigen Widerstände des Leiters zu rechnen.

Wir gingen im § 15 von dem d'Alembertschen Prinzip aus. Dieses verlangt, daß Gleichgewicht besteht zwischen den äußeren Kräften P_i und den Trägheitskräften; durch eine passende

Umformung des Ausdruckes der Trägheitskräfte ergaben sich die Lagrangeschen Gleichungen (64)

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right)+\frac{\partial T}{\partial p_\lambda}+P_\lambda=0. \tag{186}$$

Da nun die zyklischen Koordinaten p_1, p_2 in den Ausdruck der lebendigen Kraft nicht eingehen, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}=\frac{\partial T}{\partial p_2}=0$$

zu setzen.

Ferner folgt aus dem Energieausdruck (185)

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial T}{\partial J_1}&=\frac{1}{c^2}\{L_{11}J_1+L_{12}J_2\},\\ \frac{\partial T}{\partial q_2}=\frac{\partial T}{\partial J_2}&=\frac{1}{c^2}\{L_{12}J_1+L_{22}J_2\}.\end{aligned} \tag{186a}$$

Diese Differentialquotienten von T nach den zyklischen Geschwindigkeiten werden in der Mechanik als zyklische Momente oder zyklische Impulskomponenten bezeichnet. Nach (185c, d) sind sie identisch mit den magnetischen Induktionsflüssen, welche von den beiden Stromringen umschlungen werden. Diese werden daher wohl auch als elektrokinetische Momente der beiden Stromringe bezeichnet. Für die Trägheitskräfte, welche bei einer Änderung der elektrokinetischen Momente entstehen, erhält man

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)&=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\{L_{11}J_1+L_{12}J_2\},\\ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)&=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\{L_{12}J_1+L_{22}J_2\}.\end{aligned} \tag{186b}$$

In der mechanischen Analogie sollen nun, wie erwähnt wurde, diesen Trägheitskräften der zyklischen Bewegung die induzierten elektromotorischen Kräfte entsprechen. Wir finden, daß sie in der Tat übereinstimmen mit den im vorigen Paragraphen (185e, f) gefundenen Werten der induzierten Kräfte. Ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung beschränkt sich indessen nicht auf Ströme in ruhenden Leitern. Denn auch für bewegte Stromringe bleibt das Faradaysche Induk-

tionsgesetz gültig, welches die induzierten elektromotorischen Kräfte der zeitlichen Abnahme der Zahl der umschlungenen magnetischen Induktionslinien proportional setzt. Auch für bewegte Stromkreise werden also die induzierten elektromotorischen Kräfte E_1^i, E_2^i durch (186b) gegeben.

Setzen wir nun für die äußeren Kräfte die Summe der eingeprägten und der Widerstandskräfte

$$\begin{aligned} P_1 &= E_1^e - J_1 R_1, \\ P_2 &= E_2^e - J_2 R_2, \end{aligned} \tag{186c}$$

so ergeben die Lagrangeschen Gleichungen (186)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\{L_{11}J_1 + L_{12}J_2\} + E_1^e - J_1 R_1 &= 0, \\ -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\{L_{12}J_1 + L_{22}J_2\} + E_2^e - J_2 R_2 &= 0. \end{aligned} \tag{186d}$$

Diese Gleichungen bestimmen allgemein den zeitlichen Verlauf quasistationärer elektrischer Ströme in zwei Stromringen. Wir werden in den folgenden Paragraphen zahlreiche Anwendungen derselben kennen lernen.

Wir kehren jetzt zurück zu unserem Bizykel. Bisher wurden die Lagrangeschen Gleichungen nur auf die zyklischen Koordinaten angewandt. Wir wollen jetzt die Gleichungen aufstellen, welche den Koordinaten der ersten Gruppe zugehören, d. h. den Parametern, welche die Lage der Stromkreise bestimmen. Wir wollen sie mit $p_3, p_4 \ldots$ bezeichnen und die zugehörigen verallgemeinerten Kraftkomponenten mit $P_3, P_4 \ldots$. Dieses sind die äußeren ponderomotorischen Kräfte, welche den zwischen den Stromringen wirksamen elektrodynamischen Kräften das Gleichgewicht halten.

Halten wir die Leiter fest und die Stromintensitäten konstant, so fallen alle Differentialquotienten nach der Zeit fort und die Lagrangeschen Gleichungen (186) ergeben für die durch die zyklischen Bewegungen bedingten ponderomotorischen Kräfte

$$+\frac{\partial T}{\partial p_3}, \quad +\frac{\partial T}{\partial p_4}, \quad \text{usf.}$$

Diese Kräfte sind in der zugrunde gelegten Analogie den elektrodynamischen Kräften äquivalent. Man erhält für die Arbeit, welche diese Kräfte bei einer virtuellen Verrückung der Leiter bzw. ihrer Teile leisten,

$$\frac{\partial T}{\partial p_3}\delta p_3 + \frac{\partial T}{\partial p_4}\delta p_4 + \cdots$$

Es ist zu beachten, daß hier die partiellen Differentialquotienten nach p_3, p_4 bei konstant gehaltenen zyklischen Geschwindigkeiten q_1, q_2 zu nehmen sind. Daraus folgt: Die virtuelle Arbeit der elektrodynamischen Kräfte ist gleich der Zunahme, welche die elektrokinetische Energie erfährt, wenn die Verrückung bei konstant gehaltenen Stromintensitäten ausgeführt wird. Die elektrodynamischen Kräfte stationärer Ströme streben demnach die elektrokinetische Energie so weit zu vergrößern, als es mit der Bewegungsfreiheit des Systemes verträglich ist.

Diese aus den Lagrangeschen Gleichungen gezogene Folgerung befindet sich in Übereinstimmung mit den Tatsachen. Denken wir uns z. B. die beiden Leiter starr und den einen fest, den anderen um seinen Mittelpunkt drehbar. Da J_1, J_2 konstant gehalten werden sollen und die Selbstinduktionskoeffizienten L_{11}, L_{22} von der relativen Lage der Stromkreise unabhängig sind, so ändert sich bei einer Drehung des zweiten Leiters nur der durch (184a) bestimmte Anteil T_{12} der Energie; dieser ist proportional $\frac{L_{12}J_1}{c}$, d. h. dem Induktionsfluß, der vom ersten Strome durch den zweiten hindurchgesandt wird. Der zweite drehbare Stromleiter wird sich demnach so einzustellen streben, daß er möglichst viele der vom ersten festen Stromringe herrührenden magnetischen Induktionslinien umschlingt.

Die elektrodynamischen Kräfte, die zwischen zwei starren Stromringen wirken, leisten bei einer beliebigen Änderung der relativen Lage der beiden Ringe die Arbeit

$$\delta T = \frac{J_1 J_2}{c^2}\delta L_{12}.$$

Diese Arbeit kann gleichgesetzt werden der bei konstant gehaltenen Stromstärken erfolgenden Abnahme eines „elektrodynamischen Potentiales“

$$-\frac{J_1 J_2}{c^2} \cdot L_{12}.$$

Ist der Raum von einem Medium konstanter Permeabilität erfüllt, so wird das Potential nach (183b) gleich

$$-\frac{J_1 J_2}{c^2} \cdot \mu \int\int \frac{(d\mathfrak{s}_1, d\mathfrak{s}_2)}{r_{12}}. \tag{186e}$$

Dieser Ausdruck wurde zuerst von F. E. Neumann auf Grund der Fernwirkungstheorie entwickelt.

Unsere Ableitungen gelten auch für biegsame Stromleiter, bei denen L_{11}, L_{22} variabel sind. Im allgemeinen ist das elektrodynamische Potential der negativen magnetischen Energie gleichzusetzen, und es ist zu beachten, daß die Variation des Potentiales bei konstant gehaltenen Stromstärken auszuführen ist. Aus diesem allgemeinen Ausdrucke ergeben sich die ponderomotorischen Kräfte stationärer oder quasistationärer Ströme stets in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Die Feststellung, daß die Gesetze der Elektrodynamik sich aus den allgemeinen Gleichungen der Mechanik ableiten lassen, ist von der größten Bedeutung für die gesamte Naturanschauung geworden. Einmal hat diese Feststellung Maxwells auf die Mechanik insofern zurückgewirkt, als man unter Beseitigung der Fernkräfte der Mechanik eine Form zu geben suchte, welche geeignet war, die im elektromagnetischen Felde wirkenden Kräfte zu umfassen. Diese Richtung, die in der Hertzschen Mechanik gipfelt, hält an der Vorstellung fest, daß alle physikalischen Vorgänge schließlich auf Bewegungen träger Massen zurückzuführen sind. Sie muß, wo die Bewegung der sichtbaren Massen die Erscheinungen nicht erklärt, verborgene Massen zu Hilfe nehmen, die in Bewegung begriffen sind. Der ganze Raum muß als von solchen Massen erfüllt betrachtet werden. Dieselben sind miteinander gekoppelt und

übertragen so die Bewegung von einem Körper auf den anderen; die Hertzsche Mechanik postuliert die Zurückführung aller Fernkräfte auf solche Mechanismen verborgener Massen.

Die Vorstellung eines Mechanismus in dem von ponderabler Materie leeren Raume hat manches Gekünstelte. Aber auch derjenige, der sie nicht akzeptiert, muß die Wichtigkeit der Entdeckung anerkennen, daß die Bewegungen der ponderablen Körper und die elektrodynamischen Vorgänge denselben Gesetzen unterworfen sind. Man braucht allerdings diese enge Beziehung der Mechanik zur Elektrodynamik nicht unbedingt zugunsten der mechanischen Naturanschauung zu deuten. Man kann in ihr mit demselben Rechte einen Hinweis darauf sehen, daß die Bewegungen der Körper den Gesetzen der Elektrodynamik unterworfen sind. Dieser Auffassung neigt in der Tat die moderne Physik mehr und mehr zu; man wünscht die Mechanik aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes abzuleiten und überhaupt die ganze Physik elektromagnetisch zu begründen.

Da wir uns von vornherein weder für die mechanische noch auch für die elektromagnetische Anschauung entscheiden wollten, haben wir es vorgezogen, die Gesetze der Induktion direkt an der Hand der Erfahrung zu entwickeln. Wir werden auch die Behandlung der ponderomotorischen Kräfte von demselben Standpunkte aus im vierten Abschnitte wieder aufnehmen.

§ 65. Ein Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

Wir betrachten einen einzelnen geschlossenen Stromring. In demselben mögen gewisse eingeprägte Kräfte wirken, die durch die chemische und thermische Beschaffenheit der zum Stromring zusammengefügten Leiter bedingt sind. Zu diesen Kräften können noch solche elektromotorischen Kräfte treten, die von Stromschwankungen in anderen Stromkreisen oder irgendwelchen sonstigen Änderungen des umschlungenen magne-

tischen Induktionsflusses herrühren. Diese Kräfte wollen wir hier zu den eingeprägten rechnen, indem wir die induktive Rückwirkung unseres Stromringes auf die übrigen Leiter außer Betracht lassen. Das Linienintegral aller der eingeprägten Kräfte bezeichnen wir mit E. Die Summe dieser elektromotorischen Kraft und der elektromotorischen Kraft

$$-\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}$$

der Selbstinduktion muß dann dem Produkte aus Widerstand und Stromstärke gleich sein:

$$E-\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}=R\cdot J. \tag{187}$$

Bringen wir die Stromstärke J, die als Unbekannte zu gelten hat, auf die linke Seite, so wird die Differentialgleichung erhalten

$$\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}+RJ=E. \tag{187a}$$

Deren Integration ergibt bei gegebener elektromotorischer Kraft die zeitliche Änderung der Stromintensität J.

A. E konstant. In diesem Falle erhält man, da auch L und R Konstanten sind, als Lösung der Differentialgleichung (187a)

$$J=\frac{E}{R}-C\cdot e^{-\frac{c^2R}{L}\cdot t}. \tag{188}$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen. Wird der Strom zur Zeit $t=0$ geschlossen und von nun an der Einwirkung einer konstanten eingeprägten elektromotorischen Kraft unterworfen, so ist

$$C=\frac{E}{R}$$

zu setzen, damit J für $t=0$ verschwindet. Wir haben dann

$$J=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\vartheta}}\right), \tag{188a}$$

wobei abkürzungsweise

$$\vartheta = \frac{L}{c^2 R} \tag{188b}$$

gesetzt ist.

Die Konstante ϑ hat die Dimension einer Zeit. Sie wird als Zeitkonstante des Stromkreises bezeichnet. Von ihr hängt das zeitliche Anschwellen der Stromstärke nach dem Stromschlusse ab. Dasselbe erfolgt um so langsamer, je größer die Selbstinduktion im Verhältnis zum Widerstande ist.

B. E periodisch. Wir nehmen die äußere elektromotorische Kraft als periodisch an, etwa nach dem Gesetze

$$E = a \cdot \sin(\nu t)$$

schwingend; a stellt hier die Amplitude, ν die Frequenz (Schwingungszahl in 2π Sekunden) dar. Uns interessiert nur der Wechselstrom J der Frequenz ν, der sich unter der Einwirkung dieser periodischen elektromotorischen Kraft herstellt. Demgemäß suchen wir (187a) zu genügen durch den Ansatz

$$J = b \cdot \sin(\nu t + \beta) = b \cdot \{\sin \nu t \cos\beta + \cos \nu t \sin\beta\}. \tag{189}$$

Es wird dann

$$\frac{dJ}{dt} = b \cdot \nu \cdot \cos(\nu t + \beta) = b\nu \cdot \{\cos \nu t \cos\beta - \sin \nu t \sin\beta\}.$$

Soll (187a) für alle t erfüllt sein, so haben die Konstanten b, β den Gleichungen zu genügen

$$\begin{aligned} \frac{L}{c^2} \cdot b\nu \cos\beta + Rb \sin\beta &= 0, \\ -\frac{L}{c^2} \cdot b\nu \sin\beta + Rb \cos\beta &= a. \end{aligned} \tag{189a}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\nu \cdot L}{c^2 R} \tag{189b}$$

und durch Kombination der ersten und zweiten

$$b = \frac{a}{R} \cdot \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + \frac{\nu^2 L^2}{c^4}}}. \tag{189c}$$

Die Gleichung (189b) zeigt an, daß der Strom J (Gleichung 189) der Phase nach hinter der erregenden elektromotorischen Kraft zurückbleibt. Die Gleichung (189c) bestimmt das Verhältnis $b:a$ der Amplituden von Strom und elektromotorischer Kraft. Dasselbe wird nicht, wie bei Gleichstrom, durch den reziproken Widerstand R gegeben, sondern durch das Reziproke des Ausdruckes

$$R' = \sqrt{R^2 + \frac{\nu^2 L^2}{c^4}}, \tag{189d}$$

der stets größer als R ist und der „scheinbarer Widerstand“ oder auch „Impedanz“ genannt wird.

Wir wollen die Differentialgleichung (187a) noch auf die Probespule anwenden, die wir in § 55 zur Definition des Vektors $\mathfrak{B}$ verwandten. Die bei der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes induzierte elektromotorische Kraft ist nach dem Induktionsgesetz gleich

$$-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_\nu\, df,$$

wo

$$\int \mathfrak{B}_\nu\, df$$

den umschlungenen Induktionsfluß anzeigt. Nun sollte die Probespule so klein gewählt werden, daß das magnetische Feld auf f wirklich homogen war, daher ist der Induktionsfluß gleich

$$\mathfrak{B}_\nu \cdot df$$

zu setzen; demnach wird die elektromotorische Kraft

$$E = -\frac{1}{c} \cdot f \cdot \frac{d\mathfrak{B}_\nu}{dt}.$$

Ferner war in § 55 von einem Felde die Rede, welches vom unmagnetischen Anfangszustande (für $t = 0$) aus erregt und dann konstant gehalten wird; hier ist

$$\int_0^\infty E\, dt = -\frac{1}{c} \cdot f \cdot \mathfrak{B}_\nu,$$

und es ergibt Gleichung (187a)

$$\frac{L}{c^2}\cdot\int_0^\infty \frac{dJ}{dt}\cdot df + R\int_0^\infty J\,dt = -\frac{1}{c}\cdot f\cdot \mathfrak{B}_\nu.$$

Da der induzierte Strom schließlich wieder erlischt, so ist

$$\int_0^\infty \frac{dJ}{dt}\,dt = 0;$$

es fällt also das erste Glied fort. Ferner ist

$$\int_0^\infty J\,dt = e$$

die Elektrizitätsmenge, die im ganzen den Querschnitt durchströmt hat. Es wird daher

$$R\cdot e = -\frac{1}{c} f \mathfrak{B}_\nu,$$

d. h. es hängt e nicht von der Selbstinduktion, sondern nur von dem Widerstande der Spule und dem schließlich umschlungenen Induktionsflusse ab. Wir durften daher in § 55, ohne von der Selbstinduktion der Spule zu reden, den Vektor $\mathfrak{B}$ durch die Gleichung (163)

$$-\mathfrak{B}_\nu = c\cdot\frac{Re}{f}$$

definieren. Die Definition von $\mathfrak{B}$ durch die Probespule stimmt also mit den Gesetzen der Elektrodynamik überein.

Wir haben hier nur von der magnetischen Energie des Stromes gesprochen, nicht von seiner elektrischen Energie. Und doch wird im allgemeinen auch der stationäre Strom von einem elektrischen Felde umgeben sein.

Denken wir uns nämlich den Kreisstrom durch eine eingeprägte Kraft unterhalten, die an einer bestimmten Stelle in die Strombahn eingeschaltet ist (etwa ein galvanisches Element),

so entstehen freie elektrische Ladungen und in deren Folge ein elektrostatisches Feld; denn nur dadurch, daß ein tangentielles Potentialgefälle längs der Leitung besteht, wird der Strom in den homogenen Teilen der Leitung aufrechterhalten. Dem elektrostatischen Felde aber entspricht eine elektrische Energie.

Die elektrostatische Energie ist aber meist nur gering im Vergleiche zu der magnetischen Energie, die man deshalb gewöhnlich allein als Stromenergie bezeichnet. Insbesondere für dünne Leitungsdrähte ist der elektrische Anteil der Energie zu vernachlässigen. Wir können uns in dieser Hinsicht auf das Resultat des § 36 berufen, wonach die Kapazität eines stabförmigen Leiters mit abnehmender Dicke kleiner und kleiner wird. Demnach wird bei gegebener Spannungsverteilung längs der Leitung mit abnehmender Dicke die Ladung immer geringer. Da nun die elektrische Energie eines elektrostatischen Feldes sich nach Gleichung (146a) durch die Produkte der Ladungen und Spannungen ausdrückt, so wird mit abnehmendem Querschnitte der Leitung die elektrische Energie immer geringer. Die magnetische Energie aber verhält sich gerade umgekehrt. Bei gegebenem Strome ist die Feldstärke in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes dem Abstand von der Drahtachse umgekehrt proportional, die magnetische Energiedichte daher dem Quadrate derselben, die magnetische Energie wird daher logarithmisch unendlich, wenn der Querschnittsradius gleich Null wird. Aus diesem Grunde durften wir auch bei der Berechnung der Selbstinduktion nicht den Leiter als linearen Leiter ansehen; die Selbstinduktion eines solchen würde unendlich sein. Da nun mit abnehmendem Querschnitt der Leitung die magnetische Energie des Stromes immer größer, die elektrische immer kleiner wird, so wird die letztere schließlich gegen die erstere zu vernachlässigen sein.

Neben dem Querschnitt kommt allerdings noch die Leitfähigkeit des Materials in Frage. Wird die Strombahn aus einem schlechten Leiter gebildet, so wird die elektrische Energie beträchtlich. Denn hier bedürfen wir weit größerer

elektrischer Kräfte als bei einem guten Leiter, um einen Strom von bestimmter Stärke, also auch ein magnetisches Feld von gegebener Energie, aufrechtzuerhalten. Die elektrische Energie wächst daher, bei gegebener magnetischer Energie, umgekehrt proportional dem Quadrate der Leitfähigkeit.

Von solchen Fällen sehen wir hier ab und verstehen, wie üblich, unter der Energie eines geschlossenen Stromes ausschließlich die Energie des von ihm erzeugten magnetischen Feldes. Man kann übrigens die elektrostatische Energie ganz ausschließen, wenn man die den Strom unterhaltenden eingeprägten Kräfte nicht auf eine kurze Strecke konzentriert, sondern in passender Weise längs der Strombahn verteilt annimmt; durch passende Verteilung kann man in der Tat erreichen, daß kein elektrisches Feld in der Umgebung des Drahtes entsteht.

§ 66. Ein Stromkreis mit Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand. Elektrische Eigenschwingungen.

Bisher haben wir in diesem Kapitel nur von Strömen gesprochen, die in geschlossenen Bahnen fließen. Jetzt betrachten wir einen Leitungsdraht, dessen Enden in die sich gegenüberstehenden Platten eines Kondensators ausmünden. Bei dieser Anordnung wird, wie wir wissen, der Leitungsstrom durch den die Kondensatorplatten verbindenden Verschiebungsstrom zu einer geschlossenen Strömung ergänzt. Ist indessen die dielektrische Schicht hinreichend dünn, so kann für die Berechnung des magnetischen Feldes und der magnetischen Energie die Anordnung als einem geschlossenen Stromkreise gleichwertig betrachtet werden, indem der Verschiebungsstrom in der dünnen dielektrischen Schicht durch ein kurzes, vom Leitungsstrom durchflossenes Drahtstück ersetzt gedacht wird.

Die Einschaltung des Kondensators bringt nun aber insofern eine wesentlich neue Problemstellung mit sich, als seine Kapazität und seine elektrische Energie zu berücksichtigen sind. In der Tat geht z. B. aus der für die Kapazität K des Kugelkondensators abgeleiteten Formel (130)

hervor, daß die Kapazität gerade für geringen Abstand der Kondensatorbelegungen beträchtlich wird. Und aus der Formel (146d) folgt, daß die elektrische Energie des Kondensators

$$U = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \varphi^2$$

ist, wenn φ jetzt für die Potentialdifferenz der Kondensatorbelegungen geschrieben wird.

Da anderseits die magnetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} \cdot J^2$$

ist, so beträgt die jeweilige Energie des Systemes

$$W = U + T = \frac{1}{2} K \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} \cdot J^2. \tag{190}$$

Äußere elektromotorische Kräfte sollen nicht wirksam sein. Alsdann muß die Joulesche Wärmeentwickelung durch eine Energieabnahme des Systemes kompensiert werden; es ist

$$RJ^2 = -\frac{dW}{dt} = -K\varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{L}{c^2} J \frac{dJ}{dt}.$$

Da nun der Strom der einen Kondensatorbelegung Elektrizität entzieht und der anderen die gleiche Menge zuführt, so hat man

$$J = -\frac{de}{dt} = -K\frac{d\varphi}{dt}; \tag{190a}$$

dabei ist Leitungsstrom und Potentialgefälle längs des Drahtes in demselben Sinne gerechnet.

Wir erhalten jetzt

$$RJ = \varphi - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt}, \tag{190b}$$

eine Gleichung, die wir auch direkt gewonnen hätten, wenn wir in Gleichung (187) des vorigen Paragraphen für E die Potentialdifferenz der Kondensatorbelegungen gesetzt hätten. Aus (190a, b) folgt

$$\varphi + R \cdot K \frac{d\varphi}{dt} + \frac{L \cdot K}{c^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \tag{190c}$$

Diese Differentialgleichung bestimmt den zeitlichen Verlauf der Potentialdifferenz der Kondensatorplatten.

Nach (190a) ist dieselbe Differentialgleichung

$$J + RK \cdot \frac{dJ}{dt} + \frac{LK}{c^2} \frac{d^2J}{dt^2} = 0 \tag{190d}$$

für den zeitlichen Verlauf des Stromes maßgebend.

Die Gleichungen sind von der Form

$$y'' + 2\delta y' + (\nu^2 + \delta^2)y = 0, \tag{191}$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{Rc^2}{L} \tag{191a}$$

und

$$\nu^2 = \frac{c^2}{LK} - \frac{1}{4} \frac{R^2c^4}{L^2}. \tag{191b}$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (191) ist

$$y = c_1 \cdot e^{k_1 t} + c_2 \cdot e^{k_2 t}, \tag{191c}$$

worin c_1, c_2 Integrationskonstanten, k_1 und k_2 aber die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$k^2 + 2\delta k + \nu^2 + \delta^2 = 0 \tag{191d}$$

sind.

Wir erhalten zwei wesentlich verschiedene Arten der Entladung des Kondensators, je nachdem ν^2 negativ oder positiv ist.

Ist

$$R > \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \quad \nu^2 < 0,$$

so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (191d)

$$k_1 = -\delta + \nu i, \quad k_2 = -\delta - \nu i \tag{192}$$

reell.

Die Lösung (191c) ergibt in diesem Falle eine aperiodische Entladung. Je mehr wir aber den Widerstand R verkleinern, dabei L vergrößern und K verkleinern, desto mehr nähern wir uns dem Falle, wo

$$R < \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \quad \nu^2 > 0$$

ist.

In diesem Falle findet eine oszillatorische Entladung statt. Durch Umformung der Lösung (191c) und indem wir die Integrationskonstanten durch andere ersetzen, erhalten wir

(192a) $$y = a \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\nu t + \alpha).$$

Hier kann y sowohl Strom J wie Potentialdifferenz φ bedeuten. Die Integrationskonstanten a und α sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Das hier behandelte Problem geht übrigens in das im vorigen Paragraphen behandelte über, wenn man $K = \infty$ setzt. Dann wird

$$\nu = \delta i,$$

daher

$$k_1 = -2\delta = -\frac{Rc^2}{L}, \quad k_2 = 0.$$

Die Gleichung (191c) ergibt dann

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{c^2 R}{L} \cdot t} + c_2,$$

einen Ausdruck, der das vollständige Integral der Differentialgleichung (187a) des geschlossenen Kreisstromes darstellt, für den Fall, daß die eingeprägte Kraft E gleich Null ist. Ein Stromkreis, in den ein Kondensator von unendlich großer Kapazität eingeschaltet ist, ist demnach einem geschlossenen Stromkreis äquivalent.

Ein anderer Grenzfall wird erhalten, wenn der Widerstand $R = 0$ gesetzt wird. Dann wird $\delta = 0$, mithin geht (192a) über in

(192b) $$y = a \cdot \sin(\nu t + \alpha).$$

Das Phänomen ist dann ein rein periodisches.

Die Schwingungsfrequenz ν (Schwingungszahl in 2π Sekunden) wird in diesem Falle nach (191b)

(192c) $$\nu = \frac{c}{\sqrt{LK}}.$$

Bezeichnet jetzt τ die Dauer einer ganzen Schwingung, so ist

(192d) $$\tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{LK}.$$

Die theoretische Möglichkeit oszillatorischer Flaschenentladungen wurde zuerst von W. Thomson erkannt. Nach ihm wird die Formel (192d) für die Schwingungsdauer meist die „Thomsonsche Formel“ genannt. Daß die rechte Seite in der Tat die Dimension einer Zeit hat, davon überzeugt man sich an der Hand der Dimensionstafel des § 61. Das Gaußsche System, welches die Kapazität elektrostatisch, die Selbstinduktion aber elektromagnetisch definiert, also beide Größen in Zentimetern mißt, ist hier das zweckmäßigste. Die Wellenlänge der elektrischen Wellen von der Schwingungsdauer τ im Äther wird hier durch die Gleichung

$$\lambda = c \cdot \tau = 2\pi\sqrt{LK} \tag{192e}$$

in Zentimetern berechnet.

Kommt der Leitungswiderstand R in Betracht, so ist die Entladung nicht mehr streng periodisch, sondern sie erfährt eine Dämpfung, die in (192a) durch den Exponentialfaktor sich kundgibt; dabei wird dann die elektromagnetische Energie des Kreises allmählich in Joulesche Wärme verwandelt. Für die Schwingungsfrequenz gilt jetzt die Formel (192c) nicht mehr genau, sondern sie ist durch die exakte Formel (191b) zu ersetzen. Auch die Thomsonsche Formel ist entsprechend zu korrigieren, doch kommt die Korrektion nicht in Betracht, falls R^2 klein gegen $\frac{4L}{c^2K}$ ist.

Wir wollen die Formeln auf einen konkreten Fall anwenden. Die Kapazität K können wir für einen Kugelkondensator nach Gleichung (134) berechnen. Hat man z. B.

$$\varepsilon = 5, \quad a = 10 \text{ cm}, \quad b = 10{,}2 \text{ cm},$$

so folgt

$$K = 2550 \text{ cm}.$$

Wir denken uns eine Leydener Flasche von dieser Kapazität durch einen einfachen Schließungsbogen entladen; es mag etwa

$$L = 10^7 \text{ cm}$$

sein. Der Widerstand sei gleich 1 Ohm, daher in absolutem elektrostatischen Maße

$$R = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}.$$

Diese Zahl ist hier für R zu setzen, da das Gaußsche System den Widerstand elektrostatisch mißt. Demgemäß wird

$$R^2 = \frac{1}{81} \cdot 10^{-22}, \quad \frac{4L}{c^2 K} = \frac{4 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{20} \cdot 2550} = \frac{16}{9} \cdot 10^{-17} \text{ zirka.}$$

Der Quotient

$$R^2 : \frac{4L}{c^2 K}$$

ist demnach etwa gleich 10^{-7}.

Der Widerstand beeinflußt also die Frequenz der Schwingungen nur sehr wenig, und man darf mit der Thomsonschen Formel rechnen. Dieselbe ergibt gemäß (192d, e)

$$\lambda = 2\pi\sqrt{2550 \cdot 10^7} = 10^6 \text{ cm}$$

und

$$\tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Die Dämpfungskonstante δ endlich wird nach (191a)

$$\delta = 50,$$

d. h. der Exponentialfaktor in (192a), der die Dämpfung der Schwingungen ausdrückt, nimmt unter den angenommenen Verhältnissen erst nach 0,02 Sekunden den Wert

$$e^{-1} = \frac{1}{2{,}718}$$

an. Während dieser Zeit erfolgen aber 600 Schwingungen, so daß in der Tat für eine kleine Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen die Abnahme der Amplitude kaum merklich ist. Der durch (192b) dargestellte Fall der ungedämpften Schwingung hat daher als Grenzfall, der sich oft in großer Annäherung mit dem wahren Vorgange deckt, eine nicht zu unterschätzende Bedeutung.

Wir wollen diesen Grenzfall noch etwas eingehender erörtern. Setzen wir

$$J = a \cdot \sin(\nu t), \tag{193}$$

so folgt aus Gleichung (190b), die hier in

$$\varphi = \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}$$

übergeht,

$$\varphi = \frac{L}{c^2} \cdot a\nu \cdot \cos(\nu t),$$

oder nach (192c)

$$\varphi = \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{L}{K}} \cdot \cos(\nu t). \tag{193a}$$

Diese Form der Lösung ist bereits den Anfangsbedingungen angepaßt, die man zu stellen hat, falls die Belegungen des geladenen Kondensators zur Zeit $t = 0$ in leitende Verbindung gebracht werden; diese plötzliche Herstellung der leitenden Verbindung wird in der Tat durch den elektrischen Funken verwirklicht. Zur Zeit $t = 0$ fließt noch kein Strom. Demgemäß ist die magnetische Energie Null; es ist die Energie nur in elektrischer Form vorhanden. Sie beträgt

$$W = U = \frac{1}{2}K\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2 \cdot L}{c^2}. \tag{193b}$$

Nun beginnt der Strom zu fließen; die elektrische Energie wird im Verlaufe einer Viertelschwingung in magnetische Energie verwandelt; zu dieser Zeit

$$t = \frac{\tau}{4} = \frac{\pi}{2\nu}$$

ist

$$U = 0$$

und

$$W = T = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 L}{c^2}. \tag{193c}$$

Im Verlaufe der nächsten Viertelschwingung kehrt die Energie wieder zwischen die Kondensatorplatten zurück und dann beginnt das Spiel von neuem, indem ein pulsierender Energiestrom bald vom Kondensator in das den Leitungsdraht umgebende Magnetfeld, bald wieder zurück strömt; dabei ist im Mittel die magnetische Energie der elektrischen gleich.

Die anfängliche Potentialdifferenz φ_0 hängt von der Schlagweite der Funkenstrecke ab; die Stromamplitude a bestimmt sich hieraus; es ist

$$\varphi_0 = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{L}{K}},$$

daher

$$a = \varphi_0 \cdot c \sqrt{\frac{K}{L}}. \tag{194}$$

Die Stromamplitude ist daher um so größer, je größer die Kapazität des Kondensators und je kleiner die Selbstinduktion des Schließungsbogens ist.

Die Wellenlänge des vorhin durchgerechneten Zahlenbeispiels betrug 10 Kilometer; dies entspricht der Größenordnung nach den von Feddersen beobachteten Schwingungen. Hier ist die Annahme quasistationärer Strömung durchaus zulässig. Denn die Dimensionen des Flaschenkreises sind klein gegen die Wellenlänge; für die Berechnung der Selbstinduktion einerseits kommt die kurze, vom Verschiebungsstrom eingenommene Strecke des Kreises nicht in Betracht, und anderseits ist die Kapazität des Leitungsdrahtes sehr gering gegen die Flaschenkapazität. Demgemäß ist die obige mit den Begriffen der Potentialtheorie operierende Betrachtung hier angemessen. Wir konnten das Problem so behandeln, als ob das elektrische Feld momentan der Ladung der Kondensatorbelegungen, das magnetische dem im Schließungskreise zirkulierenden Strome entspricht. Daher reichten diejenigen mathematischen Methoden aus, welche zunächst nur für die Elektrostatik bzw. die stationäre elektrische Strömung entwickelt worden sind. Gerade dasjenige, was die Maxwellsche Theorie von der Fernwirkungstheorie unterscheidet, kommt bei diesen Schwingungen noch nicht zur Geltung. Für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie war daher die Erzeugung schnellerer elektrischer Schwingungen notwendig.

Es war Heinrich Hertz, der zuerst lehrte, elektrische Wellen von wesentlich kürzerer, im Laboratorium meßbarer Wellenlänge zu erregen und zu beobachten und der so die Grundlage für die experimentelle Prüfung der Maxwellschen Theorie schuf. Aus der Thomsonschen Formel folgt, daß man theoretisch die Wellenlänge verkleinern kann, indem man Kapazität des Kondensators und Selbstinduktion des Schließungsbogens möglichst klein wählt. Man wird also den Abstand der Kondensatorplatten möglichst vergrößern und an Stelle

eines mehrfach gewundenen, einen möglichst gestreckten Draht setzen. Tut man dies, so gelangt man schließlich zu derjenigen Erregerform, die von Hertz bei seinen ersten Versuchen verwandt wurde. Derselbe besteht aus zwei Kugeln, die durch einen geradlinigen, in der Mitte durch die Funkenstrecke unterbrochenen Draht verbunden sind. Die Wellenlänge der von diesem Erreger entsandten Wellen betrug nur wenige Meter. Es ist sehr bemerkenswert und war theoretisch nicht vorauszusehen, daß der elektrische Funke die Eigenschaft besitzt, in einer gegen die Schwingungsdauer dieser schnellen Schwingungen kurzen Zeit den die Funkenbahn ausfüllenden Isolator leitend zu machen und seinen Widerstand so zu erniedrigen, daß wirklich oszillatorische, nicht aperiodische Entladungen eintreten.

Bei diesen Hertzschen Schwingungen ist es nun nicht mehr gestattet, den Strom als quasistationär anzusehen. In der Tat, der Leitungsstrom ist hier auch nicht näherungsweise geschlossen, der Verschiebungsstrom, der die eine Kugel des Erregers mit der anderen durch den Isolator hindurch verbindet, kommt hier wesentlich in Betracht. Auch ist die Länge der offenen Bahn des Leitungsstromes hier durchaus nicht mehr klein gegen die Wellenlänge, sondern nur wenig kleiner als eine halbe Wellenlänge. Man muß daher die zeitliche Ausbreitung des Feldes berücksichtigen, d. h. die Differentialgleichungen des Feldes integrieren, wenn man die hier stattfindenden Schwingungsvorgänge mathematisch behandeln will. Das wird insbesondere dann notwendig, wenn man zu noch kürzeren Wellen übergeht. Hertz selbst gelangte in seinen Hohlspiegelversuchen zu einer Wellenlänge von 60 cm herab, spätere Experimentatoren haben elektrische Wellen von nur wenigen Millimetern Wellenlänge beobachtet.

Bei der praktischen Verwendung der schnellen Schwingungen in der drahtlosen Telegraphie hat man es mit Wellen von 100 bis 1000 Metern Wellenlänge zu tun. Die Sendedrähte oder Antennen, die man dabei verwendet, sind ihrerseits von derselben Größenordnung; auch hier darf man demnach

nicht ohne weiteres mit den Begriffen operieren, welche der Theorie der quasistationären Strömung entnommen sind.

Diese Theorie erweist sich insbesondere insofern als unzureichend, als sie die vom Erreger ausgesandten Wellen nicht enthält. Diese Wellen führen Energie mit sich, und je weiter bei dem Fortgange der Schwingungen die Wellenzüge sich im Raume ausbreiten, desto mehr muß die Energieeinheit des Wellenerregers aufgezehrt werden. Auf diese Energiestrahlung nimmt die Theorie der quasistationären Strömung keine Rücksicht. Sie führt die Dämpfung ausschließlich auf die Joulesche Wärme zurück, während in Wirklichkeit auch bei verschwindendem Widerstande die Erregerschwingungen eine Dämpfung durch Strahlung erfahren. Auch sind es gerade die von dem Sendedrahte ausgesandten Wellen, die in der drahtlosen Telegraphie wirksam sind.

Um über die Wirkung einer gegebenen Senderanordnung ein Urteil zu gewinnen, genügt es nicht, die Vorgänge in dem Senderapparat zu verfolgen; man muß auch wissen, welches die Amplituden der auf den Empfänger fallenden Wellen sind und wie diese durch Veränderungen am Sender beeinflußt werden.

Auf diese Fragen werden wir im zweiten Bande des Werkes genauer eingehen.

§ 67. Elektrische Resonanz.

Die Wellen, die ein Hertzscher Erreger aussendet, werden der Beobachtung dadurch zugänglich gemacht, daß man einen Resonator in das Feld der Wellen bringt. H. Hertz selbst beobachtete die kleinen Funken, die sich an den einander gegenüberstehenden Enden eines kreisförmigen Resonators ausbilden, spätere Experimentatoren wandten elektrometrische und bolometrische Messungsmethoden an. In der drahtlosen Telegraphie verwendet man als Empfangsapparat eine dem Sendeapparat ähnliche, mit einer Empfangsantenne versehene Anordnung und gibt beiden Apparaten die gleiche Schwingungsdauer. Als Reagens für die elektrische Erregung des Empfängers bedient man sich des Kohärers. Für das Überspringen der

Funken bzw. das Ansprechen des Kohärers ist die maximale elektrische Spannung maßgebend, während die elektrometrischen und bolometrischen Methoden Zeitintegrale des Quadrates von Spannung bzw. Strom messen.

Die strenge Theorie der elektrischen Resonanz kann nur durch Integration der Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes gewonnen werden. Denn die Dimensionen der Resonatoren sind, insbesondere bei Verwendung von Antennen, mit der Wellenlänge der in ihnen stattfindenden Schwingungen vergleichbar. Dennoch konnte V. Bjerknes, der die Untersuchungen von Heinrich Hertz in dieser Richtung weiterführte, die wichtigsten Erscheinungen der elektrischen Resonanz auf Grund der elementaren Schwingungslehre erklären. (Anm. d. Phys. 55. S. 120. 1895.)

Wir gelangen zu dem Ansatze der Bjerknesschen Theorie, indem wir in der Grundgleichung (187) der Theorie der quasistationären Strömung für die elektromotorische Kraft E einen allgemeineren Ausdruck setzen. Die von den Ladungen der Kondensatorbelegungen herrührende elektromotorische Kraft φ hatten wir bereits im vorigen Paragraphen berücksichtigt. Dazu tritt jetzt die von den auffallenden Wellen herrührende äußere elektromotorische Kraft, die wir mit E^a bezeichnen wollen. Dieselbe wird der längs des Resonatorkreises integrierten elektrischen Feldstärke der auffallenden Wellen gleich zu setzen sein und wird nicht nur von der Amplitude und Frequenz dieser Wellen abhängen, sondern auch von der Form des Resonators, sowie von seiner Stellung gegen die Wellen und gegen die Richtungen des elektrischen und des magnetischen Vektors in den Wellen. Die Einführung dieser äußeren Kraft in (187) ergibt

$$\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} + RJ = \varphi + E^a, \tag{195}$$

oder infolge von

$$J = -K\frac{de}{dt} = -K\cdot\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\varphi + RK\frac{d\varphi}{dt} + \frac{LK}{c^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -E_a. \tag{195a}$$

Um nun zu der Differentialgleichung zu gelangen, welche der Gleichung (191) für die Eigenschwingungen entspricht, setzen wir wieder

$$\frac{c^2}{LK} = \nu^2 + \delta^2, \quad \frac{Rc^2}{L} = 2\delta, \tag{195b}$$

und erhalten

$$\varphi'' + 2\delta\varphi' + (\nu^2 + \delta^2)\varphi = -(\nu^2 + \delta^2)E_a. \tag{195c}$$

Bjerknes setzt nun für die von den Erregerwellen ausgeübte elektromotorische Kraft eine gedämpft periodische Funktion der Zeit, deren Frequenz und Dämpfungskonstante mit denen der Erregerschwingungen identisch sind. Er führt die Integration der Differentialgleichung (195c) für den allgemeinen Fall durch, daß Erreger und Resonator verschiedene Frequenz und verschiedene Dämpfung besitzen. Wir wollen uns indessen hier auf die Behandlung des speziellen Falles beschränken, wo der Erreger dieselbe Frequenz ν und Dämpfungskonstante δ besitzt, wie der Resonator. Wir setzen

$$-E^a(\nu^2 + \delta^2) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\nu t). \tag{196}$$

A ist dann der Bjerknessche „Intensitätsfaktor", der von der Amplitude und Frequenz der Erregerschwingungen und von der Form und Stellung des Resonators abhängt. Jetzt wird

$$\varphi'' + 2\delta\varphi' + (\nu^2 + \delta^2)\varphi = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\nu t). \tag{196a}$$

Eine Partikulärlösung dieser Differentialgleichung ist

$$\varphi = \frac{A}{2\nu} \cdot t \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\nu t), \tag{197}$$

wie man durch Einsetzen in die Differentialgleichung leicht beweist. Das vollständige Integral von (196a) erhält man, indem man zu (197) das mit zwei Integrationskonstanten versehene Integral der homogenen Gleichung hinzufügt, die durch Nullsetzung der rechten Seite von (196a) entsteht. Dieses hinzuzufügende Glied entspricht der gedämpften Eigenschwingung des Resonators. Setzt man aber voraus, daß vor dem Eintreffen der Welle, das zur Zeit $t = 0$ stattfindet, der

Resonator ungeladen und stromlos war, so gelten die Anfangsbedingungen: für $t = 0$ ist

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Diesen Anfangsbedingungen nun genügt bereits das partikuläre Integral (197); demselben ist demnach nichts hinzuzufügen.

Die Amplitude der Resonatorschwingungen steigt, wie aus (197) hervorgeht, nach dem Gesetze $t \cdot e^{-\delta t}$ zunächst an, um dann, wenn die schwächer gewordene äußere Kraft die eigene Dämpfung des Resonators nicht mehr kompensieren kann, wiederum abzunehmen. Der Zeitpunkt, wo die Potentialamplitude am größten geworden ist, wird gegeben durch

$$0 = \frac{d}{dt}\{t \cdot e^{-\delta t}\} = e^{-\delta t}(1 - \delta t),$$

oder

$$t = \frac{1}{\delta}.$$

Die dann eintretende maximale Potentialamplitude ist

$$\varphi_m = \frac{A}{2\nu\delta e}. \tag{197a}$$

Ihr Wert ist für die mit Hilfe des elektrischen Funkens oder des Kohärers festzustellende Erregung des Resonators maßgebend.

Wir haben uns hier auf die Behandlung des speziellen Falles beschränkt, wo Erreger und Resonator die gleiche Frequenz und die gleiche Dämpfungskonstante besitzen. Dieser Fall ist in der drahtlosen Telegraphie nahezu realisiert, wenn man als Erreger einen einfachen Marconischen Sendedraht und als Resonator einen Empfangsdraht der gleichen Länge und Dicke verwendet. Dann stimmen die Frequenzen der Eigenschwingungen überein und auch die Dämpfungen der beiden Leiter, die hauptsächlich durch Strahlung bedingt sind, sind nicht sehr verschieden. Es geht aus (197a) hervor, daß die Erregung des Empfängers um so größer ist, je geringer die Dämpfung der beiden Leiter gewählt ist. In der Tat wird der

Empfänger von den isochronen Erregerwellen um so stärker ins Mitschwingen versetzt werden, je geringer seine eigene Dämpfung, sowie auch die Dämpfung der Erregerschwingungen ist.

Das Ansprechen des Resonators ist indessen nicht auf den Fall vollkommener Isochronität beschränkt. Man kann das Verhalten des Resonators am besten durch Konstruktion der sogenannten „Resonanzkurve" veranschaulichen; diese Kurve erhält man, indem man etwa den Erreger in bestimmter Weise abändert, die Frequenz des Erregers als Abszisse und das Ansprechen des Resonators als Ordinate aufträgt. Diese Resonanzkurven fallen natürlich verschieden aus, je nach der Art, wie man den Erreger abändert, d. h. je nachdem man seine Frequenz durch Veränderung der Kapazität oder der Selbstinduktion variiert; sie fallen ferner verschieden aus, je nach der Art des zur Messung des Ansprechens verwandten Methode. Alle diese Resonanzkurven aber haben einen gemeinsamen Charakter. Sie besitzen ein Maximum in der Nähe der Isochronität. Nach beiden Seiten hin fallen die Kurven um so steiler ab, je geringer die Dämpfung des Erregers, sowie die Dämpfung des Resonators ist. Konstruiert man die zu verschiedenen Werten der Dämpfungsdekremente gehörigen Resonanzkurven, von größeren zu geringeren Dekrementen fortschreitend, so erhält man eine Kurvenschar, in der jede Kurve die vorhergehende einhüllt; in der Nähe der Isochronität erheben sich die Kurven zu einem immer höheren und steileren Maximum. Ein solches Verhalten ergibt sich aus der elementaren Schwingungslehre in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Diese Verhältnisse sind für die drahtlose Telegraphie von Wichtigkeit. Man wird hier aus zwei Gründen wünschen, mit einer möglichst geringen Dämpfung zu arbeiten. Erstens, weil dadurch die Maximalamplitude der Spannung entsprechend vergrößert würde, zweitens, weil nur bei hinreichend geringer Dämpfung eine abgestimmte Telegraphie möglich ist. Infolge der mehr oder weniger veränderlichen Empfindlichkeit des Kohärers ist man nämlich gezwungen, die Anordnung so zu treffen, daß der Kohärer in einem Augenblicke größter Empfindlichkeit

auch dann reagiert, wenn die maximale Potentialamplitude des Empfängers in einem bestimmten Verhältnis kleiner ist, als das Maximum der Resonanzkurve. Daher findet ein Ansprechen des Empfängers nicht nur bei genauer Isochronität des Senders statt, sondern auch dann, wenn der Sender eine etwas abweichende Frequenz besitzt. Es gibt einen ganzen Bereich an Frequenzen, auf die der Empfänger anspricht. Dieser Bereich ist um so kleiner, je steiler das Maximum der Resonanzkurve ist, d. h. je geringer die Dämpfungen der beiden Apparate sind. Wünscht man nun den Empfangsapparat einer Station so abzustimmen, daß er nur auf einen bestimmten Sender, nicht aber auf andere, gleichzeitig nach anderen Stationen telegraphierende Sender anspricht, so müssen die Frequenzen dieser anderen Sender außerhalb des Bereiches des Ansprechens liegen. Man wird mit um so mehr Sendern nach verschiedenen Stationen unabhängig telegraphieren können, je kleiner die Bereiche des Ansprechens, d. h. je geringer die Dämpfungen der Apparate sind.

Man kann nun aber die Dämpfung eines Senders nicht beliebig erniedrigen. Denn die Dämpfung durch Strahlung ist bei der drahtlosen Telegraphie unvermeidlich. Die vom Sender zum Empfänger eilenden elektromagnetischen Wellen sind es ja gerade, welche die telegraphischen Zeichen übermitteln. Ihre Energie wird den Senderschwingungen entzogen und die so entstehende Dämpfung muß man mit in Kauf nehmen. Eine Anordnung des Senders, welche diese Dämpfung beseitigte, würde für die drahtlose Telegraphie unbrauchbar sein. Die Strahlungsdämpfung ist um so größer, als es bisher nicht gelungen ist, die Wellen nach dem Orte der Empfangsstation zu konzentrieren. Die Wellen breiten sich nach allen Seiten hin aus und entziehen dem Sender erhebliche Energiemengen. Man könnte daran denken, dem Sender die Energie dauernd nachzuliefern. Auch das ist aber bisher nicht gelungen. Nur der elektrische Funke vermag diese schnellen Schwingungen auszulösen. Der beim Funkenübergang einsetzende Schwingungsvorgang verläuft unabhängig

von äußeren Einwirkungen. Seine Energie ist bestimmt durch das Funkenpotential und durch die Kapazität der eingeschalteten Kondensatoren. Diese Kapazität ist nicht beliebig zu steigern; denn es müßte, um gleich schnelle Schwingungen zu erhalten, der Thomsonschen Formel gemäß die Selbstinduktion gleichzeitig verringert werden. Aber auch ein kurzer und dicker Schließungsbogen besitzt eine bestimmte Selbstinduktion; diese kann nicht unterschritten werden.

Die Herabdrückung der Dämpfung des Senders ist demnach nur durch Schwächung der entsandten Wellen möglich. Hierdurch würde der Intensitätsfaktor A verkleinert und so die Tragweite des Senders verringert werden. Die Forderungen guter Abstimmbarkeit und großer Tragweite widersprechen sich also.

Wir haben hier den Fall behandelt, daß der Sender nur eine einzige gedämpfte Schwingung ausführt. Dieser Voraussetzung entspricht die ursprüngliche Marconische Senderschaltung, bestehend aus einer Antenne, eventuell mit eingeschalteter Kapazität. Es ist aber klar, daß der oben gezogene Schluß aus rein energetischen Gründen auch bei komplizierteren Senderschaltungen zutreffen muß. Wünscht man lange anhaltende Schwingungen zu erzeugen, so muß man die Ausstrahlung verringern, daher auf große Tragweite verzichten. Wünscht man hingegen eine möglichst große Entfernung zu erreichen, so muß man möglichst intensive Wellen erzeugen. Alsdann erschöpft sich die Energie des Senders rasch; die Schwingungen erlöschen und gestatten so keine scharfe Abstimmung.

§ 68. Zwei induktiv gekoppelte Stromkreise.

Wir haben im letzten Paragraphen den Fall behandelt, daß ein Stromkreis einen zweiten zu Schwingungen anregt. Wir haben indessen eine Rückwirkung des zweiten Kreises auf den ersten nicht in Betracht gezogen. Eine solche Rückwirkung wird stattfinden, wenn die Entfernung der beiden Kreise gering, etwa von der Ordnung der Wellenlänge ist.

Im Rahmen dieses Kapitels, d. h. auf Grund der Theorie der quasistationären Strömung, können wir strenge nur den Fall behandeln, daß die Entfernung der beiden Stromkreise klein gegen die Wellenlänge der in ihnen pulsierenden Ströme ist. Für den Tesla-Transformator gelten die Ansätze dieses Paragraphen exakt, auf die neueren Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie sind sie aus den in § 66 dargelegten Gründen nur mit Vorsicht anzuwenden. Diese neueren Braun-Slabyschen Senderanordnungen sind aus zwei Teilen zusammengesetzt. Der erste Teil stellt einen geschlossenen Stromkreis dar, bestehend aus einer Zahl Leydener Flaschen und einem Schließungsbogen bzw. einer Spule, der zweite Teil des Systemes enthält die Sendeantenne. Letztere ist entweder direkt an den ersten Kreis angeschlossen oder vermittels elektromagnetischer Induktion mit ihm verkoppelt. Den ersten Kreis, der klein gegen die Wellenlänge der entstehenden Schwingungen ist, kann man unter Umständen auf Grund der Theorie der quasistationären Strömung behandeln, den zweiten hingegen, der die Antenne enthält, nicht. Nichtsdestoweniger konnte M. Wien (Ann. d. Phys. (4) 8. S. 686. 1902) zeigen, daß gewisse Eigenschaften dieser Sendeapparate sich auf Grund jener Theorie ableiten lassen. Wir wollen diese, auf den Regeln der allgemeinen Schwingungslehre beruhenden Eigenschaften gleichfalls entwickeln, indem wir die Vorgänge in zwei induktiv gekoppelten Stromkreisen unter Annahme quasistationärer Strömung verfolgen.

Wir gehen dabei zurück auf die Gleichungen (186d), welche bereits der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion Rechnung tragen. Die dort eingeführten elektromotorischen Kräfte E_1^e, E_2^e wollen wir jetzt durch die von den Ladungen eingeschalteter Kondensatoren herrührenden ersetzen, d. h. durch die Potentialdifferenzen φ_1, φ_2 ihrer Belegungen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \frac{1}{c^2} L_{11} \frac{dJ_1}{dt} - \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ_2}{dt} &= J_1 R_1, \\ \varphi_2 - \frac{1}{c^2} L_{22} \frac{dJ_2}{dt} - \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dJ_1}{dt} &= J_2 R_2. \end{aligned} \tag{198}$$

Diese Gleichungen gehen auch aus der in § 66 für einen einzelnen Stromkreis aufgestellten Gleichung (190b) durch Einführung der gegenseitigen Induktion hervor. Wir setzen, wie dort,

$$J_1 = -K_1 \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad J_2 = -K_2 \frac{d\varphi_2}{dt}, \tag{198a}$$

indem wir unter K_1, K_2 die Kapazitäten des in den ersten bzw. den zweiten Kreis eingeschalteten Kondensators verstehen.

Dadurch geht (198) über in

$$\begin{aligned} \varphi_1 + R_1 K_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{L_{11} K_1}{c^2} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{L_{12} \cdot K_2}{c^2} \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 0, \\ \varphi_2 + R_2 K_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{L_{22} K_2}{c^2} \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{L_{12} \cdot K_1}{c^2} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = 0. \end{aligned} \tag{198b}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Widerstände R_1, R_2 gering sind, so daß die von ihnen herrührende Dämpfung nicht wesentlich den Schwingungsvorgang beeinflußt. Setzen wir sie gleich Null, so werden die Frequenzen der beiden Stromkreise bei fehlender Koppelung nach (191b)

$$\nu_1 = \frac{c}{\sqrt{L_{11} K_1}}, \quad \nu_2 = \frac{c}{\sqrt{L_{22} K_2}}. \tag{198c}$$

Schreiben wir weiter abkürzungsweise

$$k_1 = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{L_{12}}{L_{11}}, \quad k_2 = \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{L_{12}}{L_{22}}, \tag{198d}$$

so gelten für φ_1, φ_2 die simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + \nu_1^2 \varphi_1 + k_1 \varphi_2'' = 0, \\ \varphi_2'' + \nu_2^2 \varphi_2 + k_2 \varphi_1'' = 0. \end{aligned} \tag{198e}$$

Da die Vermutung nahe liegt, daß die Gleichungen sich durch periodische Lösungen befriedigen lassen, so machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \varphi_1 = a_1 \cdot e^{i \cdot \nu t}, \\ \varphi_2 = a_2 \cdot e^{i \cdot \nu t}. \end{aligned} \tag{199}$$

Gelingt es, durch diesen komplexen Ansatz den Differentialgleichungen zu genügen, so stellen die reellen Teile dieser

Ausdrücke ein reelles Lösungssystem der linearen Gleichungen dar. Wir erhalten durch Einsetzen in (198e)

$$\begin{aligned} a_1(\nu_1^2 - \nu^2) &= k_1 a_2 \nu^2, \\ a_2(\nu_2^2 - \nu^2) &= k_2 a_1 \nu^2 \end{aligned} \tag{199a}$$

oder

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\nu_1^2 - \nu^2}{k_1 \nu^2} = \frac{k_2 \nu^2}{\nu_2^2 - \nu^2}. \tag{199b}$$

Ist demnach die Frequenz ν der entstehenden Schwingungen gefunden, so ist a_2 durch a_1 bestimmt. Ferner folgt für ν^2 die quadratische Gleichung

$$\nu^4(1 - k_1 k_2) - \nu^2(\nu_1^2 + \nu_2^2) + \nu_1^2 \nu_2^2 = 0. \tag{199c}$$

Führt man durch die Substitutionen

$$\nu = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{\tau_1}, \quad \nu_2 = \frac{2\pi}{\tau_2} \tag{199d}$$

die Schwingungsdauern ein, so erhält man

$$\tau^4 - \tau^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \tau_1^2 \tau_2^2(1 - k_1 k_2) = 0, \tag{199e}$$

daher

$$\tau^2 = \frac{1}{2}\left\{\tau_1^2 + \tau_2^2 \pm \sqrt{(\tau_1^2 - \tau_2)^2 + 4k^2 \tau_1^2 \tau_2^2}\right\}, \tag{199f}$$

wenn abkürzungsweise

$$k^2 = k_1 k_2 = \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}} \tag{199g}$$

gesetzt wird. Wir nennen k^2 den „Koppelungskoeffizienten".

Wir verstehen nun unter τ_1 die größere, unter τ_2 die kleinere der Schwingungsdauern der beiden Kreise vor der Koppelung, hingegen unter τ', τ'' die Schwingungsdauern der beiden Eigenschwingungen des gekoppelten Systemes, und zwar mag τ'^2 die größere, τ''^2 die kleinere der Wurzeln (199f) bezeichnen. Dann folgt aus jener Gleichung

$$\tau' > \tau_1 \geqq \tau_2 > \tau''. \tag{200}$$

Die langsamere Eigenschwingung des gekoppelten Systemes ist langsamer, die schnellere schneller als jede der beiden Eigenschwingungen der ungekoppelten Kreise.

Auch wenn man den Fall betrachtet, daß die beiden Stromkreise vor der Koppelung die gleiche Schwingungsdauer

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \frac{2\pi}{\nu_1} = \frac{2\pi}{\nu_2} = \frac{2\pi}{\nu_0} \tag{200a}$$

besitzen, d. h. daß

$$L_{11} K_1 = L_{22} K_2$$

ist, fallen die Perioden des gekoppelten Systemes keineswegs zusammen; es wird vielmehr

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau_0 \cdot \sqrt{1+k}, \\ \tau'' &= \tau_0 \cdot \sqrt{1-k}. \end{aligned} \tag{200b}$$

Zwei Kreise der gleichen Periode geben, miteinander gekoppelt, ein System von zwei verschiedenen Perioden, von denen die eine größer, die andere kleiner als die Periode der ungekoppelten Kreise ist.

Wir wollen für diesen letzteren Fall, wo die ungekoppelten Kreise aufeinander abgestimmt sind, den Schwingungsvorgang genauer verfolgen. Zu den Frequenzen übergehend, erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu'^2 &= \frac{\nu_0^2}{1+k}, \\ \nu''^2 &= \frac{\nu_0^2}{1-k}. \end{aligned} \tag{200c}$$

Der Frequenz $\nu = \nu'$ entspricht nun eine Partikularlösung

$$\varphi_1' = a_1' \cdot e^{i\nu' t}, \quad \varphi_2' = a_2' \cdot e^{i\nu' t},$$

der Frequenz $\nu = \nu''$ eine Partikularlösung

$$\varphi_1'' = a_1'' \cdot e^{i\nu'' t}, \quad \varphi_2'' = a_2'' \cdot e^{i\nu'' t}$$

der Differentialgleichungen (198e). Für die entsprechenden Konstanten folgt aus (199b), (200c) und (199g)

$$\begin{aligned} \frac{a_2'}{a_1'} &= \frac{\nu_0^2 - \nu'^2}{k_1 \nu'^2} = \frac{k}{k_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \\ \frac{a_2''}{a_2''} &= \frac{k_2 \nu''^2}{\nu_0^2 - \nu''^2} = -\frac{k_2}{k} = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}. \end{aligned} \tag{200d}$$

Da nun die beiden ungekoppelten Kreise aufeinander abgestimmt sind, d. h.

$$L_{11} K_1 = L_{22} K_2$$

ist, so folgt aus (198d)

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{L_{22}}{L_{11}}. \tag{200e}$$

Die beiden Systeme von Partikularlösungen werden demnach

$$\varphi_1' = a_1' \cdot e^{i\nu' t}, \quad \varphi_2' = a_1' \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \cdot e^{i\nu' t}$$

und

$$\varphi_1'' = a_1'' \cdot e^{i\nu'' t}, \quad \varphi_2'' = -a_1'' \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \cdot e^{i\nu'' t}.$$

Wir können etwa für die komplexen Konstanten a_1', a_2'' setzen

$$a_1' = a' \cdot e^{i\alpha'}, \quad a_1'' = a'' \cdot e^{i\alpha''},$$

wo a', α', a'', α'' jetzt vier reelle Integrationskonstanten bedeuten. Der Übergang zu den reellen Bestandteilen und die Zusammensetzung der Partikularlösungen ergibt dann

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a' \cos(\nu' t + \alpha') + a'' \cos(\nu'' t + \alpha''), \\ \varphi_2 &= \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \cdot \left\{ a' \cos(\nu' t + \alpha') - a'' \cos(\nu'' t + \alpha'') \right\}. \end{aligned} \tag{201}$$

Dieses ist die vollständige Lösung für den Fall zweier ursprünglich in Resonanz befindlicher und dann induktiv gekoppelter Kreise. Durch passende Wahl der Integrationskonstanten kann sie jedem vorgegebenen Anfangszustande angepaßt werden. Die entsprechenden Stromstärken in den beiden Kreisen sind nach (198a)

$$\begin{aligned} J_1 &= K_1 \{ a' \nu' \sin(\nu' t + \alpha') + a'' \nu'' \sin(\nu'' t + \alpha'') \}, \\ J_2 &= \sqrt{K_1 K_2} \cdot \{ a' \nu' \sin(\nu' t + \alpha') - a'' \nu'' \sin(\nu'' t + \alpha'') \}. \end{aligned} \tag{201a}$$

Ist nun der erste Kreis anfangs geladen und stromlos und der zweite Kreis ungeladen und stromlos und wird zur Zeit $t = 0$ der Schwingungsvorgang durch einen Funkenübergang im ersten Kreise eingeleitet, so sind die Anfangsbedingungen zu stellen

(201b) $t = 0 : \varphi_1 = \varphi_0, \quad J_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad J_2 = 0.$

Den beiden Bedingungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0$ genügen wir, indem wir die Phasenkonstanten $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$ setzen.

Alsdann folgt gemäß (201) aus $\varphi_2 = 0$

$$a' = a''$$

und daher aus $\varphi_1 = \varphi_0$

(201c) $$a' = a'' = \frac{\varphi_0}{2}.$$

Die Potentiale in den beiden Kreisen werden jetzt

(201d)
$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}\left\{\cos \nu' t + \cos \nu'' t\right\},$$
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\left\{\cos \nu' t - \cos \nu'' t\right\}.$$

Es tritt also jede der beiden Schwingungsfrequenzen in beiden Kreisen auf; die Amplituden des Potentiales im zweiten Kreise hängen wesentlich von dem Verhältnisse der Kapazitäten ab. Der Koppelungskoeffizient k spielt nur insofern eine Rolle, als er gemäß (200c) die Frequenzen der beiden Eigenschwingungen beeinflußt; dabei ist die Differenz der beiden Schwingungszahlen um so kleiner, je loser die Koppelung ist. Bei loser Koppelung und geringer Schwingungsdifferenz darf man setzen

(201e) $$\nu' = \nu_0\left(1 - \tfrac{1}{2}k\right), \quad \nu'' = \nu_0\left(1 + \tfrac{1}{2}k\right),$$

daher

(201f) $$\nu' + \nu'' = 2\nu_0, \quad \nu'' - \nu' = k\nu_0.$$

Für lose Koppelung entspricht demnach das arithmetische Mittel der beiden Schwingungsfrequenzen der gemeinsamen Frequenz der ungekoppelten Kreise, die Differenz der beiden Frequenzen ist dem Koppelungskoeffizienten proportional.

Zwei Schwingungen der gleichen Amplitude und nur wenig verschiedener Periode ergeben nun bekanntlich Schwebungen. Die Zahl der Schwebungen in einer gegebenen Zeit ist gleich der Differenz der Zahlen der Schwingungen, die in

der gleichen Zeit stattfinden. Es ist mithin die Zahl der Schwebungen in 2π Sekunden oder die Schwebungsfrequenz gleich

$$\nu'' - \nu' = k\nu_0.$$

Zur Zeit $t = 0$ ist das Potential im zweiten Kreise Null; nach einer halben Schwebung, zur Zeit $t = \frac{\pi}{\nu'' - \nu'}$, wird das Potential daselbst seinen größten Wert erreicht haben, um wiederum nach einer halben Schwebung gleich Null zu werden. Dieser Zusammensetzung der beiden Partialschwingungen zu einer einzigen Schwebung entspricht die Umformung von (201d) in

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cdot \cos\left(\frac{\nu'' - \nu'}{2} \cdot t\right) \cos\left(\frac{\nu'' + \nu'}{2} \cdot t\right),$$

(201g)

$$\varphi_2 = \varphi_0 \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \cdot \sin\left(\frac{\nu'' - \nu'}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu'' + \nu'}{2} \cdot t\right).$$

Bei geringer Schwingungsdifferenz, d. h. loser Koppelung, sind diese Ausdrücke zu deuten als Schwingungen der Frequenz ν_0 von periodisch wechselnder Amplitude. Nach einer halben Schwebung ist die Potentialamplitude im ersten Kreise Null, im zweiten Kreise ist sie gleich

$$\varphi_0 \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} = \varphi_0 \cdot \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}}$$

geworden. Wenn man also die Kapazität im ersten Kreise eines Tesla-Transformators erheblich größer und gemäß der Resonanzbedingung die Selbstinduktion entsprechend kleiner wählt als im zweiten Kreise, so erzielt man eine Steigerung der Potentialamplitude im zweiten Kreise. Nach einer ganzen Schwebung, zur Zeit $t = \frac{2\pi}{\nu'' - \nu'}$, ist die Potentialamplitude im zweiten Kreise Null geworden, im ersten ist sie zum anfänglichen Werte φ_0 zurückgekehrt; dabei ist aber die Schwingungsphase die entgegengesetzte geworden; das gleiche gilt von den Schwingungsphasen des zweiten Kreises, die durch das Zeitintervall einer ganzen Schwebung voneinander getrennt sind. Die anfängliche Energie des ersten Kreises

$$\frac{1}{2}\varphi_0^2 K_1$$

findet sich nach einer halben Schwebung im zweiten Kreise wieder, da

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_0 \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\right)^2 \cdot K_2 = \frac{1}{2}\varphi_0^2 K_1$$

ist. Die Energie pendelt also gewissermaßen zwischen den beiden Kreisen hin und her.

Wir wollen noch zum Grenzfalle sehr loser Koppelung der beiden in Resonanz befindlichen Kreise übergehen. Hier wird (201g)

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cdot \cos(\nu_0 t),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \cdot \frac{k \cdot \nu_0}{2} \cdot t \cdot \sin(\nu_0 t) = \varphi_0 \cdot \frac{\nu_0}{2} \cdot \frac{L_{12}}{L_{11}} \cdot t \cdot \sin(\nu_0 t). \tag{202}$$

Diese Lösung ist zu verwenden, wenn die Zeit einer Schwebung sehr groß ist gegen die in Betracht kommenden Zeiten. Alsdann steigt die Amplitude des Potentiales im zweiten Kreise der Zeit proportional an; die Rückwirkung auf den ersten Kreis aber ist herausgefallen. Diese Lösung entspricht der Problemstellung des vorigen Paragraphen; dort wurde die Einwirkung des Erregers auf den Resonator behandelt, ohne eine Rückwirkung in Betracht zu ziehen. Der „Intensitätsfaktor" A wurde dort unbestimmt gelassen, während hier dieser Faktor einen bestimmten, dem Koppelungskoeffizienten proportionalen Wert annimmt. Setzen wir in Gleichung (197) des vorigen Paragraphen die Dämpfungskonstante des Erregers gleich Null und wählen den Intensitätsfaktor A passend, so erhalten wir für φ_2 den durch Gleichung (202) gegebenen Ausdruck. Würden wir anderseits die allgemeinen Ansätze dieses Paragraphen verfolgen, ohne die Dämpfungsglieder zu vernachlässigen und ohne speziell Resonanz der beiden Kreise anzunehmen, so würde der Grenzübergang zu sehr loser Koppelung die allgemeine Bjerknessche Theorie des elektrischen Resonators ergeben, welche der Rückwirkung des Resonators auf den Erreger nicht Rechnung trägt. Eine solche allgemeine Untersuchung über die induk-

tive Erregung zweier Schwingungskreise ist von P. Drude kürzlich in den Annalen der Physik ([4]. 13. S. 512. 1904) veröffentlicht worden.

Bei enger Koppelung treten die beiden Eigenschwingungen des Systemes deutlich hervor; in diesem Falle ist die Form (201 g) der Lösung zur Deutung der beobachteten Vorgänge weniger geeignet als die ursprüngliche Form (201 d). Bei den enggekoppelten Sendern der drahtlosen Telegraphie hat man nun in der Tat zwei Eigenschwingungen festgestellt. Qualitativ lassen sich demnach die Schwingungsvorgänge in diesen Sendeapparaten auf Grund der Theorie der quasistationären Strömung diskutieren. Daß aber diese Theorie unzureichend ist, geht schon daraus hervor, daß die Entstehung elektromagnetischer Wellen, auf der die Möglichkeit einer drahtlosen Telegraphie beruht, von ihr nicht erklärt wird. Ein gründliches Verständnis der bei der drahtlosen Telegraphie stattfindenden Vorgänge ist nur auf Grund der Theorie der elektrischen Wellen möglich. Wir kommen im zweiten Bande dieses Werkes auf die mit der drahtlosen Telegraphie verknüpften Probleme der Elektrodynamik zurück.

Drittes Kapitel.

Elektromagnetische Wellen.

§ 69. Ebene Wellen in einem isotropen, homogenen Dielektrikum.

Wir gehen in diesem Kapitel zur Behandlung solcher elektromagnetischer Felder über, die zeitlich und räumlich rasch wechseln. Bei diesen versagt die Theorie des quasistationären Stromes. Man hat der mathematischen Theorie der elektrischen Wellen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper (§ 60) zugrunde zu legen.

Wir betrachten zunächst ein homogenes, isotropes Dielektrikum; ein solches ist von eingeprägten Kräften frei. Die Feldgleichungen (179), (179a) ergeben hier

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}, \tag{203a}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E}. \tag{203b}$$

Da μ konstant ist, so wird (179b)

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{203c}$$

Dazu kommt, wenn wir wahre Ladungen im Innern des Isolators ausschließen,

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0. \tag{203d}$$

Durch dieses Gleichungssystem bestimmt sich die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in dem Dielektrikum.

Wir können aus dem Gleichungssystem leicht einen der beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$ eliminieren. Man eliminiert $\mathfrak{E}$, indem man von der ersten den Curl nimmt, die zweite nach t differentiiert und, mit dem Faktor $\frac{\varepsilon}{c}$ multipliziert, zur ersten addiert. Dann folgt

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \operatorname{curl}\operatorname{curl} \mathfrak{H}.$$

Nach der Rechnungsregel (95) geht diese Gleichung mit Rücksicht auf (203c) über in

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{H}. \tag{203e}$$

Anderseits kann man auch $\mathfrak{H}$ eliminieren, indem man (203a) mit $\frac{\mu}{c}$ multipliziert und nach t differentiiert, hierauf von (203b) den Curl nimmt und diese Gleichung sodann von der ersten subtrahiert. Man erhält dann

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{E}. \tag{203f}$$

Die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ erfüllen demnach dieselbe Differentialgleichung. Für zeitlich nicht wechselnde Felder geht dieselbe in die Laplacesche Differentialgleichung über.

Wir suchen jetzt partikuläre Lösungen der Feldgleichungen, die ebenen, homogenen Wellenzügen entsprechen. Man bezeichnet einen Wellenzug als homogen, wenn man im Felde eine Schar paralleler Ebenen so legen kann, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke längs einer jeden dieser Ebenen sich nach Betrag und Richtung nicht verändern; jene Ebenen nennt man die Wellenebenen, ihre Normalenrichtung die Wellennormale. Wir wollen die x-Achse in die Wellennormale legen, so daß die Wellenebenen der (yz)-Ebene parallel werden. Da längs der Wellenebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ konstant sein sollen, so fallen die partiellen Differentialquotienten nach y und z fort und es lauten die Feldgleichungen

$$\text{(204a)} \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \end{cases}$$

$$\text{(204b)} \qquad \begin{cases} -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0, \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \end{cases}$$

$$\text{(204c)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0,$$

$$\text{(204d)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0.$$

Aus (204c, d) folgt, daß die longitudinalen, d. h. die parallel der Wellennormale genommenen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ auch längs der Wellennormale nicht variieren. Die ersten beiden der Gleichungen (204a), (204b) aber besagen, daß diese Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ auch von der Zeit nicht abhängen. Wir kennen also diese Größen für alle Zeiten und für alle Werte von x, wenn wir ihren Wert für irgendeine

Zeit und für irgendeine Parallelebene zur (yz)-Ebene angeben. Wir wollen nun voraussetzen, daß zu Beginn des Vorganges es eine Parallelebene zur (yz)-Ebene gibt, die von den Wellen noch nicht erreicht ist. Hier wird sein

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_x = 0. \tag{204e}$$

Dann verschwinden die longitudinalen Komponenten der Feldstärken im ganzen Raume und zu jeder Zeit.

Würden wir $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ nicht gleich Null, sondern konstant annehmen, so würde ein konstantes elektrisches bzw. magnetisches Feld parallel der x-Achse sich dem Felde der Wellen überlagern; konstante Felder parallel der y-Achse oder der z-Achse können wir ebenfalls einer Lösung der Gleichungen (204a, b) stets hinzufügen, da diese linearen Differentialgleichungen durch Einsetzen konstanter Werte von $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ bzw. $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ erfüllt werden. Die Wellenfortpflanzung würde durch Hinzufügung eines solchen Feldes nicht geändert werden. Daher haben solche Felder für uns kein Interesse. Sie rühren von elektrischen Ladungen oder Strömen her, die ihren Sitz außerhalb des betrachteten Feldes haben und die Wellen in dem hier betrachteten Falle nicht beeinflussen.

Wir bemerken, daß die beiden letzten, noch zu erfüllenden der Gleichungen (204a, b) die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ einerseits und $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$ andererseits miteinander verknüpfen. Wir können daher diese Paare von Komponenten getrennt behandeln. Die Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \tag{204f}$$

ergeben nach Elimination von $\mathfrak{E}_y$ bzw. $\mathfrak{H}_z$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}, \tag{204g}$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2}, \tag{204h}$$

Gleichungen, die aus (203e, f) direkt folgen, wenn man, der Annahme homogener ebener Wellen entsprechend, die Differentialquotienten nach y und z streicht. Diese partiellen

Differentialgleichungen sind aus der Theorie der schwingenden Saite bekannt. Die allgemeine Lösung von (204g) schreiben wir in der Form

$$\mathfrak{E}_y = f(x - wt) + g(x + wt), \tag{205}$$

wobei

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{205a}$$

gesetzt wird.

Die Gleichungen (204f, h) werden dann erfüllt durch

$$\mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \{f(x - wt) - g(x + wt)\}. \tag{205b}$$

Die willkürlichen Funktionen

$$f(x - wt) \quad \text{und} \quad g(x + wt)$$

stellen Wellen dar, die sich in Richtung der positiven bzw. der negativen x-Achse fortpflanzen.

Wir beschränken uns weiterhin auf die Diskussion derjenigen Partikulärlösung, welche durch die Funktion

$$f(x - wt)$$

gegeben ist. Die Form der Funktion f ist durch die Wellenkurve zur Zeit $t = 0$ bestimmt; diese Wellenkurve pflanzt sich unverzerrt mit der Geschwindigkeit w fort. Die Geschwindigkeit einer ebenen elektromagnetischen Welle in einem isotropen Isolator hängt also nicht von der Wellenform und Wellenlänge ab. Im leeren Raume, wo das Gaußsche Maßsystem

$$\varepsilon = 1 \quad \text{und} \quad \mu = 1$$

setzt, wird nach (205a) die Geschwindigkeit mit der universellen Konstanten c identisch, welche durch Vergleichung der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheiten gleich

$$3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gefunden ist. (Vgl. § 61.) Diese Zahl stimmt überein mit der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume. Wir sehen also: im leeren Raume ist die Geschwindigkeit c ebener elektromagnetischer Wellen der Lichtgeschwindigkeit gleich.

Nicht nur die Geschwindigkeit ist den Lichtwellen und den elektromagnetischen Wellen gemeinsam. Die elektromagnetischen Wellen sind wie die Lichtwellen transversal. In der Tat fanden wir, daß weder $\mathfrak{E}$ noch $\mathfrak{H}$ eine periodisch wechselnde longitudinale Komponente besitzen können. Beide Vektoren stehen senkrecht auf der Wellennormalen. Im leeren Raume zeigen demnach die elektromagnetischen Wellen und die Lichtwellen ein ganz analoges Verhalten, wenn auch ihre Wellenlängen sehr verschieden sind.

Diese Konsequenzen seiner Theorie waren es, die Maxwell zur Aufstellung der elektromagnetischen Lichttheorie führten. Die elektromagnetische Lichttheorie betrachtet die Lichtstrahlen und die Wärmestrahlen als elektromagnetische Wellen. Sie ist der alten mechanischen Theorie des Lichtes dadurch überlegen, daß sie den numerischen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus rein elektrischen Messungen zu berechnen gestattet, und dadurch, daß sie von vornherein nur transversale ebene Lichtwellen zuläßt. Die alte Theorie, welche das Licht als Wellenbewegung eines elastischen Mediums betrachtete, konnte nur schwer das Fehlen longitudinalen Lichtes erklären. Die elektromagnetische Lichttheorie schließt longitudinales Licht von vornherein aus.

In dielektrischen Körpern, deren Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Permeabilität von 1 verschieden ist, ist die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen durch (205a) gegeben. Der Brechungsindex eines Dielektrikums ist demnach allgemein gleich

$$n = \frac{c}{w} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{205c}$$

Für den Fall speziell, wo $\mu = 1$ ist, folgt die sogenannte „Maxwellsche Relation“

$$n^2 = \varepsilon. \tag{205d}$$

Für Isolatoren, die weder paramagnetisch, noch diamagnetisch sind, muß nach der Maxwellschen elektromagnetischen Lichttheorie die Dielektrizitätskonstante gleich dem Quadrate des optischen Brechungsindex sein. Die experimentelle Prüfung dieser

Folgerung gestattet es, im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie zu beurteilen, ob die Feldgleichungen das dielektrische Verhalten der Körper diesen sehr schnellen elektrischen Schwingungen gegenüber richtig beschreiben. Es entstanden ja, wie im § 60 dargelegt wurde, die Feldgleichungen für Isolatoren dadurch aus den allgemeinen Hauptgleichungen des § 59, daß die Beziehung

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}$$

von elektrostatischen auf beliebig rasch wechselnde Felder übertragen wurde. Die Gültigkeit der Maxwellschen Relation (205d) ist ein Kriterium für die Richtigkeit dieser Annahme.

Für Gase, z. B. Wasserstoff, Kohlenoxyd, Luft, hat L. Boltzmann die Dielektrizitätskonstante ε gemessen und sie in guter Übereinstimmung mit dem Quadrate des optischen Brechungsindex gefunden. Andere Körper wiederum, wie z. B. das Wasser, gehorchen nicht der Maxwellschen Relation, indem die Dielektrizitätskonstante sich als weit größer ergibt, als das Quadrat des optischen Brechungsindex. Diese Körper zeigen indessen bereits im Gebiete der Hertzschen Wellen Dispersion, d. h. Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge. Es kann daher nicht wundernehmen, daß in solchen Körpern die Lichtwellen eine ganz andere Geschwindigkeit besitzen, als sich aus der elektrostatisch gemessenen Dielektrizitätskonstante ergibt. Dieser Umstand läßt sich nicht als Argument gegen die Grundvorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie geltend machen, da ja bereits für rein elektrische Wellen in solchen Körpern die Geschwindigkeit nicht durchweg der Maxwellschen Relation entspricht. Man wird demnach das optische Verhalten dieser Isolatoren auf Grund der allgemeinen Hauptgleichungen des § 59 behandeln, aber die Beziehung zwischen elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$ und elektrischer Verschiebung $\mathfrak{D}$ erweitern; das geschieht in der Tat in den elektromagnetischen Theorien der Dispersion.

Indem wir aus dem Gleichungssystem (204a, b) diejenigen Gleichungen herausgriffen, welche $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ miteinander ver-

knüpfen, beschränkten wir die Betrachtung auf eine geradlinig polarisierte elektromagnetische Welle. In einer solchen folgen sich elektrischer Vektor, magnetischer Vektor und Richtung der Wellenfortpflanzung wie y-, z-, x-Achse eines rechtshändigen Achsensystems, d. h. wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. In der Tat kehrt sich dieser Regel gemäß die Richtung von $\mathfrak{H}$ um, wenn die Fortpflanzungsrichtung umgekehrt, aber die Richtung von $\mathfrak{E}$ beibehalten wird; daher das negative Vorzeichen, mit dem

$$g(x - wt)$$

in Gleichung (205b) versehen ist. Die Gleichungen des Systems (204a, b), welche $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$ miteinander verknüpfen, gehen aus den für $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ geltenden hervor, indem $\mathfrak{E}_y$ durch $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_z$ durch $-\mathfrak{H}_y$ ersetzt wird. Dieser Substitution entspricht eine Drehung um einen Rechten um die Wellennormale als Achse. Die Integration ergibt hier Wellen, die senkrecht zu den bisher behandelten polarisiert sind, die aber im übrigen dieselben Eigenschaften aufweisen, wie jene.

Ob die Polarisationsebene eines geradlinig polarisierten Strahles durch den Vektor $\mathfrak{E}$ oder durch $\mathfrak{H}$ bestimmt wird, läßt sich auf Grund der bisherigen Entwickelungen nicht angeben. Doch ergibt die Ausdehnung der elektromagnetischen Theorie auf Kristalle, daß man zu den Gesetzen der Kristalloptik gelangt, wenn man die optische Anisotropie auf die dielektrische zurückführt und die Polarisationsebene mit der durch $\mathfrak{H}$ und die Wellennormale gelegten Ebene identifiziert. Auch die Gesetze der Reflexion des Lichtes an der Oberfläche durchsichtiger Körper, auf die wir hier nicht eingehen wollen, ergeben sich aus der elektromagnetischen Theorie in Übereinstimmung mit den Formeln Fresnels, wenn man die Polarisationsebene eines geradlinig polarisierten Strahles senkrecht zum Vektor $\mathfrak{E}$ annimmt.

Wir wollen die Energie berechnen, welche eine ebene elektromagnetische Welle mit sich führt. Die in der Volumeinheit enthaltene Energie beträgt nach (180g)

$$\psi = \frac{1}{8\pi} \cdot \{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2\}.$$

Da nun in einer parallel der x-Achse fortschreitenden Welle, wie sie durch den ersten Summanden in (205, 205b) dargestellt wird,

(205e) $$\varepsilon \mathfrak{E}^2 = \mu \mathfrak{H}^2$$

ist, so ist die in einem gegebenen Volumen des Feldes enthaltene Energie für ebene Wellen in Isolatoren zur einen Hälfte elektrischer, zur anderen magnetischer Art. Während die Welle mit der durch (205a) bestimmten Geschwindigkeit w fortschreitet, tritt in der Sekunde durch den Quadratzentimeter einer zur Wellenebene parallelen Ebene die Energiemenge hindurch

(205f) $$\begin{cases} S = w \cdot \psi = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2\} \\ = \frac{c}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \mathfrak{E}^2 = \frac{c}{4\pi} \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}|. \end{cases}$$

Der so bestimmte Ausdruck S ist ein Maß der Energieströmung oder der Strahlung. Wir wollen, an den aus der Optik geläufigen Begriffen des Lichtstrahles uns anlehnend, S als Betrag eines Vektors deuten, dessen Richtung durch die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle bestimmt ist. Da, wie wir wissen, die Fortpflanzungsrichtung mit der Richtung des äußeren Produktes der beiden aufeinander senkrechten Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, so liegt es nahe, für den „Strahlvektor" zu setzen

(205g) $$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Dann wird die Strahlung nicht nur auf senkrecht zur Wellennormale gestellte, sondern auch auf schief gestellte Flächen durch die zur Fläche normale Komponente von $\mathfrak{S}$ angegeben.

Der erhaltene Ausdruck des Energiestromes durch die Feldstärken ergab sich hier für ebene Wellen unmittelbar aus dem für die Energiedichte angenommenen Werte. Er ist aber, wie wir später sehen werden, von weit allgemeinerer Bedeutung.

§ 70. Ebene Wellen in Halbleitern.

Wenn der homogene isotrope Körper, in welchem sich die elektromagnetische Welle fortpflanzt, zugleich elektrisch leitet, so ist die Gleichung (203a) durch Einführung des Leitungsstromes zu erweitern. Die allgemeinen Feldgleichungen (179, 179a, b) ergeben hier

$$\frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{E} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}, \tag{206a}$$

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E}, \tag{206b}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{206c}$$

Die Gleichung (203d), welche das Verschwinden der freien Elektrizität im Innern des homogenen Mediums ausspricht, bleibt auch für die Wellen im Innern des homogenen Leiters gültig. Um dieses einzusehen, bilden wir die Divergenz von (206a). Wir erhalten dann

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

Aus dieser Gleichung schlossen wir bereits im § 48, daß die räumliche Dichte der freien Elektrizität an jedem Punkte des Feldes nach dem Gesetze

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho_0' \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}}$$

abnimmt (vgl. 158, 158a), wo

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$$

die sogenannte Relaxationszeit ist. Das Abklingen einer durch ϱ_0' gegebenen Anfangsverteilung freier Elektrizität ist also ganz unabhängig von den elektromagnetischen Störungen, die von außen her in das Innere des homogenen Leiters eindringen. Nehmen wir z. B. an, daß zur Zeit $t = 0$ das Feld im Innern des Leiters Null war, so ist auch $\varrho_0' = 0$ und daher ϱ', die

Dichte der freien Elektrizität, dauernd gleich Null. Aus der so gewonnenen Gleichung

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = 0 \tag{206d}$$

und aus (206c) schließen wir nun, ganz ebenso wie im vorigen Paragraphen, daß nur transversale ebene elektromagnetische Wellen im Innern des homogenen Leiters sich fortpflanzen können. Auch läßt sich die Elimination von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$ in ganz entsprechender Weise ausführen, wie dort. Sie ergibt für diese beiden Vektoren die Differentialgleichungen

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2\mathfrak{H}, \tag{206e}$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \nabla^2\mathfrak{E}, \tag{206f}$$

die jetzt an Stelle von (203e, f) treten.

Wir untersuchen wieder ebene homogene Wellen; wir legen die x-Achse in die Fortpflanzungsrichtung und zerlegen die in die Wellenebenen fallenden Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ in ihre Komponenten. Wir betrachten auch hier nur die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$, die, optisch gesprochen, einer geradlinig und zwar parallel der z-Achse polarisierten Welle angehören. Für $\mathfrak{E}_y$ gilt sodann die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathfrak{E}_y}{\partial x^2}, \tag{206g}$$

die man bisweilen als „Telegraphengleichung“ bezeichnet findet. Derselben Differentialgleichung hat auch $\mathfrak{H}_z$ zu genügen.

Wir wollen uns etwa den Leiter durch die (yz)-Ebene begrenzt denken und ebene Wellen senkrecht auf diese Ebene fallend annehmen. Für $x = 0$ nehmen wir einen periodischen Schwingungszustand als gegeben an, von der Frequenz ν. Dieser Annahme entspricht der reelle Teil des komplexen Ausdruckes $a \cdot e^{i\nu t}$, durch den wir die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_y$ in der (yz)-Ebene darstellen wollen. Wir suchen nun der Differentialgleichung (206g) durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}_y = a \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} \tag{207}$$

zu genügen. Der reelle Teil des Ausdruckes gibt eine physikalisch zulässige Lösung der linearen Differentialgleichung.

Damit der komplexe Ausdruck (207) die vorgelegte Differentialgleichung erfüllt, ist die komplexe Konstante p folgendermaßen zu bestimmen

$$p^2 = \varepsilon\mu - i \cdot \frac{4\pi\sigma\mu}{\nu}. \tag{207a}$$

Wir wählen für p diejenige Wurzel, deren reeller Teil positiv ist, und zerlegen diese in den reellen und imaginären Bestandteil

$$p = n - i\varkappa. \tag{207b}$$

Die physikalische Bedeutung der reellen Größen n, $\varkappa$ erkennen wir, indem wir sie in (207) einführen; es wird

$$\mathfrak{E}_y = a \cdot e^{-\frac{\varkappa\nu x}{c}} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{nx}{c}\right)}. \tag{207c}$$

Es ist, wie dieser Ausdruck zeigt, $\frac{c}{n}$ die Geschwindigkeit, mit der die Wellenphasen im Leiter forteilen, daher n der Brechungsindex des Leiters. Da ferner

$$\frac{\varkappa\nu x}{c} = \varkappa \cdot \frac{2\pi x}{\lambda}$$

ist, wenn λ die Wellenlänge von Wellen der Frequenz ν im Vakuum bedeutet, so nimmt die Amplitude der Wellen im Leiter beim Fortschreiten um die Strecke $x = \lambda$ im Verhältnis $e^{-2\pi\varkappa}$ ab. Die so definierte Konstante $\varkappa$ aber nennt man den „Extinktionskoeffizienten".

Der Brechungsindex n und der Extinktionskoeffizient $\varkappa$ hängen nun mit den elektromagnetischen Materialkonstanten ε, μ, σ und der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}$$

durch die aus (207a, b) folgenden Gleichungen zusammen:

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu, \tag{207d}$$

$$n\varkappa = \sigma\mu\tau. \tag{207e}$$

Es folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$n^2 + \varkappa^2 = \mu \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2},$$

daher

$$n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right\}, \tag{207f}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon\right\}. \tag{207g}$$

Diese beiden Konstanten bestimmen die Geschwindigkeit und die räumliche Dämpfung der im Leiter sich fortpflanzenden elektromagnetischen Wellen.

Wir haben jetzt durch den für $\mathfrak{E}_y$ gemachten Ansatz (207) die Differentialgleichung (206g) erfüllt. Der entsprechenden, für $\mathfrak{H}_z$ geltenden Differentialgleichung werden wir durch einen entsprechenden Ansatz

$$\mathfrak{H}_z = b \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} \tag{208}$$

genügen.

Damit durch (207, 208) auch die Feldgleichungen (206a, b) erfüllt sind, müssen die Konstanten a, b in einem bestimmten Verhältnis stehen. Gleichung (206b) ergibt

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x};$$

hieraus folgt

$$b = a \cdot \frac{p}{\mu} = \frac{a}{\mu}(n - i\varkappa). \tag{208a}$$

Die Konstanten a und b stehen hiernach in einem komplexen Verhältnis. Um die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses zu erkennen, bilden wir die reellen Teile von (207, 208), nachdem wir

$$a = |a| \cdot e^{i\alpha}, \quad b = |b| \cdot e^{i\beta}$$

gesetzt haben.

Dann wird

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_y = |a| \cdot e^{-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}} \cdot \cos\left\{\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda} + \alpha\right\}, \\ \mathfrak{H}_z = |b| \cdot e^{-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}} \cdot \cos\left\{\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi n x}{\lambda} + \beta\right\}. \end{cases} \tag{208b}$$

Es bestimmen also α und β die Phasen der elektrischen und magnetischen Feldstärke in den Wellen. Für ebene Wellen in Isolatoren sind diese Phasen einander gleich; für ebene Wellen in dem Leiter aber folgt aus (208a)

$$\frac{|b|}{|a|} \cdot e^{i(\beta-\alpha)} = \frac{n - i\varkappa}{\mu}; \tag{208c}$$

setzen wir

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varkappa}{n}\right), \tag{208d}$$

so erhalten wir

$$|b| = \frac{|a|}{\mu} \cdot \sqrt{n^2 + \varkappa^2} = |a| \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}} \tag{208e}$$

und

$$\beta = \alpha - \gamma. \tag{208f}$$

Es bleibt daher in Leitern die magnetische Feldstärke der Wellen um den Winkel γ der Phase nach hinter der elektrischen Feldstärke zurück. Für einen Isolator wird $\gamma = 0$, und das Amplitudenverhältnis der magnetischen und elektrischen Feldstärke wird gleich $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$, entsprechend der Gleichheit der elektrischen und magnetischen Energie der Wellen, die wir im vorigen Paragraphen feststellten. Gemäß (208e) ändert das Hinzukommen der Leitfähigkeit σ das Verhältnis der Amplituden und hebt die Gleichheit der beiden Energiebeträge auf.

Wir haben die Beziehung (208a) der komplexen Konstanten a und b aus der zweiten der Feldgleichungen abgeleitet. Die erste Feldgleichung würde nichts Neues ergeben; sie würde nur zu der Relation (207a) für p^2 zurückführen.

Die Entwickelung Joulescher Wärme in Leitern bedingt die Extinktion der elektromagnetischen Wellen, die durch Gleichung (207g) angezeigt wird. Die elektromagnetische Lichttheorie behauptet also, daß die Isolatoren durchsichtig sind und daß nur leitende Körper das Licht absorbieren. Diese Behauptung entspricht im großen und ganzen den Tatsachen. Die besten Leiter, die Metalle, ab-

sorbieren das Licht am stärksten. Im einzelnen aber kommen, wie schon Maxwell selbst erkannte, Abweichungen vor. So sind die Elektrolyte, obwohl leitend, oft durchsichtig. Diese Tatsache aber erklärt sich, wie E. Cohn bemerkt hat, ganz ungezwungen auf Grund des Faradayschen Gesetzes, wonach in Elektrolyten der elektrische Strom mit einem Massentransport verbunden ist. Auch in den Lichtwellen wird gleichzeitig mit der Elektrizität die mit der Elektrizität verkoppelte Masse schwingen müssen. Die Trägheit der elektrochemischen Ionen ist aber im Verhältnis zur elektrischen Ladung so beträchtlich, daß sie ein merkliches Mitschwingen in den hohen Frequenzen der Lichtwellen nicht gestattet; der Elektrolyt verhält sich dann wie ein Isolator.

Die Maxwellsche Theorie berücksichtigt, indem sie allgemein $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ setzt, die individuellen Eigenschaften der stromführenden Ionen oder Elektronen nicht. Sie nimmt an (vgl. § 60), daß die Leitfähigkeit eines Körpers für stationären Strom auch noch bei beliebig rasch wechselnden Strömen maßgebend ist.

Ganz entsprechend, wie die Gültigkeit der Maxwellschen Relation $\varepsilon = n^2$ für Licht- und Wärmestrahlen als Kriterium für die Proportionalität von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ in Isolatoren gelten konnte, so wird die Gültigkeit der soeben für leitende Körper gewonnenen Beziehungen in der Optik ein Prüfstein für die Richtigkeit der Annahme Maxwells sein, daß Feldstärke $\mathfrak{E}$ und Dichte $\mathfrak{i}$ des Leitungsstromes auch für die schnellsten elektrischen Schwingungen in demselben Verhältnis stehen, wie für stationären Strom. Der Relation (207g) zufolge müßte nun für Licht bestimmter Farbe die Absorption mit der Leitfähigkeit der Körper parallel gehen. Ordnet man die Körper nach ihrer Durchsichtigkeit, so müßte ihre Reihenfolge die gleiche sein, wie wenn man sie nach dem reziproken Werte des Leitvermögens ordnet. Diese Beziehung zwischen Durchsichtigkeit und Leitvermögen hat sich nun gerade bei den metallischen Leitern im sichtbaren Spektralgebiete durchaus nicht bestätigt.

Um so mehr überraschte es, als neuerdings E. Hagen und H. Rubens feststellten, daß im ultraroten Spektralgebiete die optischen Eigenschaften der Metalle durchaus den Forderungen der Maxwellschen Theorie Genüge leisten. Wir wollen jetzt die Theorie dieser Versuche entwickeln.

§ 71. Das Reflexionsvermögen der Metalle.

Wir haben bisher in diesem Kapitel nur die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in homogenen Körpern behandelt. In diesem Paragraphen wollen wir den Fall behandeln, daß die elektromagnetischen Wellen auf die Oberfläche eines metallischen Leiters fallen. Wir haben neben den Differentialgleichungen, die im Innern der aneinander grenzenden Körper gelten, noch die Grenzbedingungen an ihrer Trennungsfläche heranzuziehen. Wir hatten diese Grenzbedingungen bisher nur für den speziellen Fall stationärer Felder in stromlosen Bereichen entwickelt (§ 57). Für ein beliebiges elektromagnetisches Feld ergeben sich die Grenzbedingungen durch sinngemäße Anwendungen der Integralsätze, die uns zu den Feldgleichungen führten. Diese Integralsätze besagen, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer Kurve dem elektrischen Strome durch die umschlossene Fläche, und daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs einer Kurve der zeitlichen Abnahme des umschlungenen magnetischen Induktionsflusses proportional ist. Durch Übergang zu Raumelementen ergaben sich aus diesen Sätzen die Hauptgleichungen (177) und (178). Diese Differentialgleichungen verknüpfen den Wirbel von $\mathfrak{H}$ mit der Dichte des wahren elektrischen Stromes, den Wirbel von $\mathfrak{E}$ mit der Dichte des magnetischen Stromes (Gleichungen 178b, c). Die Anwendung derselben Sätze auf die Trennungsfläche zweier Körper ergibt, daß die Dichten des elektrischen bzw. des magnetischen Flächenstromes dem Flächenwirbel der magnetischen bzw. elektrischen Feldstärke proportional sind. Wenn wir zulassen, daß der elektrische Strom auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche eines Metalles sich zusammendrängt, so wird

dieser Flächenstrom mit einem Flächenwirbel der magnetischen Feldstärke verknüpft sein. Ein solcher flächenhafter Strom würde aber in der Oberflächenschicht unendliche räumliche Stromdichte besitzen. Da wir unendliche Werte der Feldstärken von vornherein ausschließen, so ist unendliche räumliche Dichte des wahren elektrischen Stromes nur bei unendlichen Werten von σ oder ε, unendliche Raumdichte des wahren magnetischen Stromes nur bei unendlichen Werten von μ möglich. Wir werden im nächsten Paragraphen den idealen Grenzfall eines vollkommenen Leiters erörtern, der unendlicher Leitfähigkeit σ entspricht. In Wirklichkeit aber kommen jenen drei Materialkonstanten endliche Werte zu, es ist daher ein flächenhafter elektrischer oder magnetischer Strom auszuschließen. Hieraus ergeben sich die Grenzbedingungen: Der Flächenwirbel der elektrischen sowie der magnetischen Feldstärke an der Trennungsfläche zweier Körper ist gleich Null. Das heißt (§ 27): die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche.

Auf Grund dieser Grenzbedingungen soll nun das Problem der Metallreflexion in Angriff genommen werden. Das Metall soll gegen den leeren Raum durch eine Ebene begrenzt sein, die wir als (yz)-Ebene wählen. Auf diese Ebene fällt senkrecht ein periodischer Zug ebener geradlinig polarisierter Wellen

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_z = a' \cdot e^{i\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)}. \tag{209}$$

Dieser Ansatz ist in den für Wellen in Isolatoren abgeleiteten allgemeinen Ausdrücken (205), (205b) enthalten, er genügt also den Feldgleichungen. Die x-Achse weist nach dem Innern des Metalles hin. Für die reflektierte Welle machen wir den gleichfalls mit (205), (205b) verträglichen Ansatz

$$-\mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_z = a'' \cdot e^{i\nu\left(t+\frac{x}{c}\right)}. \tag{209a}$$

Die reellen Teile dieser komplexen Ausdrücke sollen die einfallenden und die reflektierten Wellen darstellen. Ihre

Amplituden werden durch die absoluten Beträge von a' bzw. a'' angegeben. Die in der einfallenden und der reflektierten Welle fortgepflanzten Strahlungen sind nach (205f) den Quadraten ihrer Amplituden proportional. Der Quotient aus reflektierter und einfallender Strahlung

$$r = \frac{|a''|^2}{|a'|^2} \tag{209b}$$

ist das gesuchte „Reflexionsvermögen" des Metalles für senkrechte Incidenz.

Um dieses zu ermitteln, haben wir die Wellen zu berücksichtigen, die in das Innere des Metalles eindringen. Für die Feldstärken dieser Wellen führen wir die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Ausdrücke ein (Gleichungen 207, 208, 208a)

$$\mathfrak{E}_y = a \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}, \tag{209c}$$

$$\mathfrak{H}_z = a\frac{(n - ik)}{\mu} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}. \tag{209d}$$

Diese Feldstärken der im Metalle fortgepflanzten Wellen sind nun mit denjenigen der im leeren Raume fortgepflanzten durch die im Eingange dieses Paragraphen entwickelten Grenzbedingungen verknüpft, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten an der Trennungsfläche fordern. Die Feldstärken an der einen Seite der Trennungsfläche $x = 0$ erhält man, indem man diejenigen der einfallenden Welle (209) und der reflektierten (209a) superponiert, die Feldstärken auf der anderen Seite der Trennungsfläche werden durch (209c, d) gegeben.

Sollen jederzeit die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ zu beiden Seiten der Trennungsfläche einander gleich sein, so müssen die komplexen Konstanten a, a', a'' den Gleichungen genügen

$$\begin{cases} a' - a'' = a, \\ a' + a'' = a\frac{(n - ix)}{\mu}. \end{cases} \tag{209e}$$

Dieselben ergeben

$$\text{(209f)} \qquad \begin{cases} a' = a\left\{+1+\dfrac{n-i\varkappa}{\mu}\right\}, \\ a'' = a\left\{-1+\dfrac{n-i\varkappa}{\mu}\right\}, \end{cases}$$

daher wird das Reflexionsvermögen nach (209b)

$$\text{(210)} \qquad r = \left|\frac{n-\mu-i\varkappa}{n+\mu-i\varkappa}\right|^2 = \frac{(n-\mu)^2+\varkappa^2}{(n+\mu)^2+\varkappa^2}.$$

Brechungsindex n und Extinktionskoeffizient $\varkappa$ des Körpers sind dabei gemäß den Gleichungen (207f, g) durch die in Gaußschem Maße gemessenen Materialkonstanten ε, σ, μ zu bestimmen. Nach der Maxwellschen Theorie gilt (210) für jeden isotropen Körper, sowohl Isolator, wie Halbleiter oder metallischen Leiter.

Da indessen, wie erwähnt, in dem sichtbaren Spektralbereiche die von der Maxwellschen Theorie geforderten Beziehungen sich nicht bestätigt haben, so wollen wir der Diskussion dieses Ausdruckes den Fall zugrunde legen, auf den die Beobachtungen von E. Hagen und H. Rubens (Ann. d. Phys. (4) 11. S. 873. 1903) sich beziehen. Diese Forscher untersuchten das Reflexionsvermögen von Metallspiegeln für langwellige ultrarote Strahlung von der Wellenlänge

$$\lambda = 1{,}2 \times 10^{-3} \text{ cm}.$$

Die Schwingungsdauer τ ist hier

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 0{,}4 \times 10^{-13} \text{ Sekunde}.$$

Die Leitfähigkeit σ des Kupfers z. B. ist in absolutem elektrostatischem Maße

$$\sigma = 5{,}14 \times 10^{17}.$$

Es wird demnach

$$2\sigma\tau = 4{,}11 \times 10^{4}.$$

In den Gleichungen (207f, g) kommt nun die hypothetische Dielektrizitätskonstante des Metalles vor. Nimmt man an, daß $\varepsilon < 4$ ist, so ist der Quotient von ε^2 durch $4\sigma^2\tau^2$ kleiner als

10^{-8}, für Kupfer. Es wird also nicht nur für Kupfer, sondern auch für schlechter leitende Metalle hier ε^2 zu streichen und $2\sigma\tau$ in (207f, g) an Stelle der Wurzel zu setzen sein. Dann steht auf der rechten Seite $2\sigma\tau \pm \varepsilon$. Für Kupfer bedeutet hier das Streichen des ε nur einen Fehler von 0,01%, für $\varepsilon < 4$, und auch für Stahl, der eine etwa zehnmal so große Leitfähigkeit besitzt, begehen wir nur einen geringen Fehler, wenn wir setzen

$$n = \varkappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}. \tag{210a}$$

Beschränken wir uns ferner auf Metalle, deren magnetische Permeabilität nicht merklich von 1 abweicht, so erhalten wir als Wert des Reflexionsvermögens (210)

$$r = \frac{(\sqrt{\sigma\tau}-1)^2+\sigma\tau}{(\sqrt{\sigma\tau}+1)^2+\sigma\tau} = \frac{2\sigma\tau-2\sqrt{\sigma\tau}+1}{2\sigma\tau+2\sqrt{\sigma\tau}+1}$$

oder, da konsequenterweise 1 gegen $2\sigma\tau$ zu vernachlässigen ist,

$$r = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}. \tag{210b}$$

Diese Formel für das Reflexionsvermögen der Metalle gegenüber langen Wellen haben nun E. Hagen und H. Rubens durchweg bestätigt gefunden (nur das Wismut macht eine Ausnahme). So ergibt z. B. für Kupfer die theoretische Formel

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{2{,}05 \times 10^4}} = 1{,}4 \times 10^{-2},$$

der Versuch ergab

$$1{,}6 \times 10^{-2}.$$

Für schlechter leitende Metalle ist der Reflexionskoeffizient entsprechend kleiner. Es hat bei gegebener Wellenlänge immer das Produkt

$$(1-r)\cdot\sqrt{\sigma}$$

für alle Metalle den gleichen Wert; dabei bedeutet $(1-r)$ offenbar den in das Metall eindringenden Bruchteil der Strahlung, d. h. das Absorptionsvermögen des Metalles.

Geht man zu Wärmestrahlen nach größerer Wellenlänge über, so weicht das Reflexionsvermögen der Metalle noch weniger von 1 ab und der geringe Unterschied ist nur ungenau festzustellen. Daher haben die genannten Forscher es vorgezogen, für längere Wellen

$$(\lambda = 2{,}55 \times 10^{-3} \text{ cm})$$

an Stelle des Reflexionsvermögens das Emissionsvermögen zu untersuchen. Nach dem Kirchhoffschen Gesetze ist bei gegebener Temperatur das Emissionsvermögen der Körper für Wärmestrahlen bestimmter Wellenlänge dem Absorptionsvermögen proportional. Es muß demnach für alle Metalle bei derselben Temperatur das Produkt aus Emissionsvermögen für strahlende Wärme bestimmter Wellenlänge und Wurzel aus der Leitfähigkeit den gleichen Wert haben. Auch dieses Gesetz haben die Versuche bestätigt; es ergab sich das Emissionsvermögen der Metalle gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, multipliziert mit

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}},$$

übereinstimmend mit der Forderung der Theorie.

Diese Versuche sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Das wichtigste Ergebnis ist: Bei den Metallen ist die von der Maxwellschen Theorie postulierte Beziehung $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ selbst für die hohen Frequenzen der Wärmestrahlen noch gültig. Man kann das Reflexionsvermögen und Emissionsvermögen der Metalle aus ihrer elektrischen Leitfähigkeit bestimmen und umgekehrt die Leitfähigkeit des Metalles aus dem Reflexionsvermögen oder Emissionsvermögen für ultrarote Strahlen berechnen. Dieses Ergebnis bildet neben der Gültigkeit der Maxwellschen Relation für Gase die wichtigste Stütze der elektromagnetischen Lichttheorie.

Wir gelangten zu der Formel (210b), indem wir ε gegen $2\sigma\tau$ vernachlässigten. Das war jedenfalls erlaubt, wenn $1 \leqq \varepsilon \leqq 4$ war. Die Gültigkeit jener Formel zeigt, daß die Dielektrizitäts-

konstante hier nicht wesentlich in Betracht kommt; es ist daher gleichgültig, welchen Wert man dieser Konstanten zuschreibt. M. Planck hat bei der Ableitung der Formel (210b) die Dielektrizitätskonstante der Metalle gleich 1 gesetzt; E. Cohn hingegen hat dafür plädiert, den Wert dieser Konstanten zunächst unbestimmt zu lassen, indem er es als möglich betrachtet, daß zwischen den sichtbaren Strahlen und jenen langwelligen Strahlen es ein Gebiet gibt, etwa bei

$$\lambda = 5 \times 10^{-4} \text{ cm},$$

wo der Wert von ε von Einfluß wird. Im sichtbaren Gebiete reicht, wie erwähnt, auch die Einführung zweier Konstanten σ und ε nicht zur Darstellung der Beobachtung an Metallen aus. Hier kommen offenbar die individuellen, von der Maxwellschen Theorie nicht berücksichtigten Eigenschaften der stromführenden Teilchen zur Geltung. Eine befriedigende Theorie der Metallreflexion im sichtbaren und ultravioletten Gebiete steht noch aus.

Was nun drittens die magnetische Permeabilität anbelangt, so haben wir sie gleich 1 gesetzt, um zur Formel (210b) zu gelangen. Würde man μ in den Formeln (210), (210a) beibehalten, so würde der Einfluß der Permeabilität zum Ausdruck gebracht werden. Nun gilt aber die Formel (210b) auch für die ferromagnetischen Metalle Eisen und Nickel; hier ist also bei diesen hohen Frequenzen nicht mehr der für statische oder langsam wechselnde Felder gültige Wert von μ einzuführen, sondern es ist μ nicht merklich von 1 verschieden anzunehmen, d. h. $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ zu setzen. Das ist um so bemerkenswerter, als nach Versuchen von V. Bjerknes beim Eindringen Hertzscher Wellen in ferromagnetische Metalle deren Permeabilität sich sehr wohl geltend macht. Es muß demnach im Intervalle zwischen den Hertzschen Wellen und den Wärmestrahlen die Permeabilität der ferromagnetischen Metalle mit der Wellenlänge stark abnehmen. Das ist aber nicht auffällig, da ja die Permeabilität dieser Körper in keiner Weise als Konstante anzusehen ist.

§ 72. Das Eindringen elektrischer Schwingungen in Metalle; der vollkommene Leiter.

Die Resultate des letzten Paragraphen sind auch für die Theorie der elektrischen Wellen in engerem Sinne von Wichtigkeit. Gilt bis zu den ultraroten Wärmestrahlen herab der für stationären Strom maßgebende Wert der Leitfähigkeit σ, so wird derselbe für Hertzsche Wellen sicher gültig sein. Ist für die geringe Schwingungsdauer der Wärmestrahlen ε gegen $2\sigma\tau$, d. h. der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom, in Metallen zu vernachlässigen, so wird das für die größere Schwingungsdauer der elektrischen Schwingungen in engerem Sinne gewiß erlaubt sein. Wir dürfen demnach in Metallen an Stelle der für Halbleiter gültigen Differentialgleichungen (206e, f) allgemein die folgenden setzen

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{H}, \tag{211}$$

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{E}. \tag{211a}$$

Für die Komponenten der Feldstärken gelten im Innern der Metalle Differentialgleichungen von der Form der Wärmeleitungsgleichung. Das Eindringen der elektrischen Schwingungen in Metalle ist eine Erscheinung, welche dem Eindringen periodischer Temperaturschwankungen in Wärmeleiter ganz analog ist.

Das Absorptionsvermögen nicht ferromagnetischer Metalle für senkrecht auffallende Wellen, d. h. der in das Metall eindringende und von ihm absorbierte Teil der Energie ist nach (210b)

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}. \tag{211b}$$

Für elektromagnetische Wellen von der Wellenlänge $\lambda = 30$ cm, d. h. von der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 10^{-9} \text{ sec},$$

wird das Absorptionsvermögen des Kupfers ($\sigma = 5{,}14 \times 10^{17}$)

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{5{,}14 \times 10^{8}}} < 10^{-4}.$$

Für diese Wellen wirkt daher eine Kupferplatte nahezu wie ein vollkommener Spiegel. Noch genauer gilt das, wenn man zu noch langsameren Schwingungen übergeht. Doch ist dann die Reflexion der Wellen schwer zu realisieren, weil dabei eine ebene Oberfläche vorausgesetzt wird, deren Abmessungen groß gegen die Wellenlänge sind.

Wir wollen das Eindringen der Wellen in das Metall noch etwas genauer verfolgen. Da wir $\mu = 1$ gesetzt und ε gestrichen haben, so bestimmen sich Brechungsindex n und Extinktionskoeffizient $\varkappa$ aus (210a). Es ist

$$n = \varkappa = \sqrt{\sigma\tau}. \tag{211c}$$

Gleichung (208a) ergibt als Verhältnis der Konstanten b und a, das für das Amplitudenverhältnis und die Phasendifferenz der elektrischen und der magnetischen Feldstärke maßgebend war,

$$b = a \cdot \sqrt{\sigma\tau} \cdot (1 - i), \tag{211d}$$

daher

$$|b| = |a| \cdot \sqrt{2\sigma\tau} \qquad \text{(Gl. 208e)} \tag{211e}$$

und

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Gl. 208d, f)}. \tag{211f}$$

Es ist also für jeden Wert von x die magnetische Feldstärke um 45° hinter der elektrischen an Phase zurück. Die Amplitude $|b|$ der magnetischen Feldstärke ist beträchtlich größer als die Amplitude $|a|$ der elektrischen Feldstärke.

Beim Eindringen in das Innere des Metalles nehmen die Amplituden der Feldstärken nach der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}}$$

ab (vgl. 208b). Die Amplituden werden also auf den Bruchteil $e^{-2\pi}$ ihres an der Oberfläche herrschenden Wertes in einem Abstande

$$x = \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}}$$

von der Oberfläche herabgesunken sein, die Energien mithin auf den Bruchteil $e^{-4\pi}$. Beträgt die Dicke einer metallischen Platte

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}} = c \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \text{ Zentimeter,} \tag{212}$$

so dringt praktisch die Strahlung nicht durch die Platte hindurch. In dem obigen Beispiele war

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma\tau}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}14 \times 10^{8}}} = 0{,}44 \times 10^{-4}, \quad \lambda = 30 \text{ cm},$$

daher

$$d = 1{,}32 \times 10^{-5} \text{ cm}.$$

Eine Kupferschicht von der Dicke eines hundertstel Millimeter läßt bereits praktisch Wellen jener Wellenlänge nicht hindurchdringen.

Geht man indessen zu langsameren Schwingungen über, so wächst die für das Abschirmen der elektrischen Wellen erforderliche Dicke der Metallschicht proportional der Wurzel aus der Schwingungsdauer. Für $\lambda = 3$ Kilometer muß die Kupferschicht eine Dicke von einem Millimeter besitzen, für $\lambda = 300$ Kilometer, entsprechend einer Schwingungsdauer von 10^{-3} Sekunden, eine Dicke von einem Zentimeter, um als Schirm für die elektromagnetischen Wechselfelder zu dienen. Stationäre magnetische Felder endlich werden durch eine Kupferhülle von endlicher Dicke überhaupt nicht abgeschirmt.

Nach (207) wird die räumliche Stromdichte im Innern des Metalles durch den reellen Teil des komplexen Ausdruckes gegeben

$$\mathfrak{i}_y = \sigma \mathfrak{E}_y = \sigma \cdot a \cdot e^{i \cdot \nu \left(t - \frac{px}{c}\right)}. \tag{212a}$$

Wir wollen das über alle Schichten erstreckte Integral

$$\mathfrak{j}_y = \int_0^\infty dx \cdot \mathfrak{i}_y \tag{212b}$$

berechnen. In dem idealen Grenzfalle, wo der Strom sich auf eine unendlich dünne Schicht an der Oberfläche des Metalles

zusammendrängt, wird dieses Integral mit der Dichte des Flächenstromes identisch. Wir erhalten

$$\mathfrak{j}_y = \frac{\sigma a c}{i \nu p} \cdot e^{i\nu t}. \tag{212c}$$

Anderseits folgt aus (208), (208a) für die magnetische Feldstärke an der Oberfläche des Metalles

$$\mathfrak{H}_z = b \cdot e^{i\nu t} = \frac{a \cdot p}{\mu} \cdot e^{i\nu t}. \tag{212d}$$

Es besteht folglich zwischen den komplexen Ausdrücken von $\mathfrak{j}_y$ und $\mathfrak{H}_z$, mithin auch zwischen ihren reellen Teilen, die Beziehung

$$\mathfrak{H}_z = \frac{i \nu p^2}{\sigma \mu c} \cdot \mathfrak{j}_y. \tag{212e}$$

Da nun bei Vernachlässigung des vom Verschiebungsstrom herrührenden Gliedes (207a) übergeht in

$$p^2 = -i \cdot \frac{4\pi\sigma\mu}{\nu},$$

so wird

$$\mathfrak{j}_y = \frac{c}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}_z. \tag{212f}$$

Diese Beziehung zwischen dem im Metalle fließenden Strome und der tangentiellen Komponente der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche hätte auch direkt aus der ersten Hauptgleichung abgeleitet werden können.

Für einen vollkommenen Leiter (von unendlicher Leitfähigkeit σ) wird die Dicke der Stromschicht unendlich klein (nach 212); $\mathfrak{j}_y$ gibt hier die Dichte des „Flächenstromes“ an. Dieser schirmt das Innere gegen das Eindringen der elektrischen Wellen. Die Joulesche Wärmeentwickelung wird Null, das Absorptionsvermögen Null, das Reflexionsvermögen 1 (vgl. 211b). Der vollkommene Leiter ist ein idealer Spiegel für die elektromagnetischen Wellen.

Der Satz, daß elektrische Schwingungen nicht in das Innere vollkommener Leiter eindringen können, ist nicht auf ebene Begrenzung und senkrecht einfallende Wellen beschränkt,

er gilt vielmehr allgemein. Um dieses einzusehen, gehen wir aus von den im Innern der Metalle geltenden Differentialgleichungen (211), (211a). Die räumliche Verteilung des Feldes im Innern des Leiters muß stetig sein, daher sind die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen sicher nicht unendlich. Geht man nun zum Grenzfall $\sigma = \infty$ über, so müssen die zeitlichen Änderungen

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

sein, damit die linken Seiten nicht unendlich werden. Es dringt also das Wechselfeld nicht in das Innere des vollkommenen Leiters ein. Da außen ein Feld vorhanden ist, so ist die Grenzfläche des vollkommenen Leiters eine Unstetigkeitsfläche des Feldes, in der endliche Flächendichte der Elektrizität und des Leitungsstromes zuzulassen sind. Die Verteilung der Elektrizität und des Stromes findet eben derart statt, daß das Innere gegen das Eindringen des Feldes geschirmt wird. Der ideale Leiter spielt in der Elektrodynamik eine ähnliche Rolle, wie die metallischen Leiter überhaupt in der Elektrostatik. Wir wollen nun die Grenzbedingungen, die an seiner Oberfläche vorzuschreiben sind, aufstellen.

Als wir im vorigen Paragraphen die Grenzbedingungen ableiteten, welche Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verlangten, da schlossen wir ausdrücklich den Fall $\sigma = \infty$ aus. Wir wollen jetzt die Grenzbedingungen angeben, welche an der Oberfläche eines vollkommenen, an ein beliebiges Dielektrikum angrenzenden Leiters von beliebiger Oberfläche gelten, dessen Inneres durch eine flächenhafte Verteilung von Elektrizität und Leitungsstrom vor dem Eindringen des elektromagnetischen Wechselfeldes geschützt wird. Die räumliche Dichte des magnetischen Stromes muß auch hier endlich bleiben, es ist also die Flächendichte des magnetischen Stromes Null, es verschwindet folglich der Flächenwirbel der elektrischen Feldstärke. Die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ sind demnach auch an der Begrenzungsfläche des vollkommenen Leiters stetig. Da nun im Innern des vollkommenen Leiters

das elektrische Feld Null ist, so sind auch außen die tangentiellen Komponenten der Feldstärke Null, d. h. der Vektor $\mathfrak{E}$ steht senkrecht auf der Oberfläche des vollkommenen Leiters. Sein Betrag ist mit der Oberflächendichte der wahren Elektrizität durch die Beziehung verknüpft

$$\mathfrak{D}_\nu = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}_\nu}{4\pi} = \omega \tag{213}$$

(ν äußere Normale des Leiters). Denn im Innern ist das Feld und, da ε in Metallen keinesfalls unendlich ist, auch die Normalkomponente der elektrischen Verschiebung Null.

Die Flächendivergenz von $\mathfrak{B}$ ist Null, da wahrer Magnetismus nicht angenommen wird. Da innen durchweg $\mathfrak{B} = 0$ ist, so ist außen

$$\mathfrak{B}_\nu = \mu \mathfrak{H}_\nu = 0, \tag{213a}$$

d. h. der Vektor $\mathfrak{H}$ weist tangentiell zur Oberfläche des vollkommenen Leiters. Was aber die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}$ anbelangt, so sind sie mit denen des Flächenstromes $\mathfrak{j}$ durch den aus der ersten Hauptgleichung folgenden Satz verknüpft. Der Flächenwirbel von $\mathfrak{H}$ ist gleich der mit $\frac{4\pi}{c}$ multiplizierten Flächendichte des elektrischen Stromes. Dieses ergibt mit Rücksicht auf den Ausdruck (104) des Flächenwirbels

$$\frac{4\pi \mathfrak{j}}{c} = -[\mathfrak{n}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{H}\mathfrak{n}].$$

Dabei zeigt der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ die nach dem Innern des Metalles hinweisende Normalenrichtung an. Wählen wir diese wie oben als x-Achse, so folgt

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4\pi \mathfrak{j}_y}{c} = \quad \mathfrak{H}_z, \\ \text{wie oben in Gleichung (212f), und} \\ \dfrac{4\pi \mathfrak{j}_z}{c} = -\mathfrak{H}_y. \end{array}\right. \tag{213b}$$

Daß die Vorzeichen hier richtig gefunden sind, ist mit Hilfe der Ampèreschen Regel leicht zu kontrollieren.

In der Theorie der elektrischen Schwingungen kann man die analytische Behandlung oft erheblich dadurch vereinfachen, daß man die im Felde befindlichen Leiter als vollkommene betrachtet. Man erzielt dadurch in vielen Fällen eine recht gute Annäherung an die Wirklichkeit. Man muß dabei aber immer bedenken, daß im Grunde die Annahme unendlicher Leitfähigkeit unzulässig ist, und wenn Widersprüche in den auf den obigen Grenzbedingungen fußenden Entwickelungen hervortreten, so muß man prüfen, ob diese nicht durch Berücksichtigung des endlichen Wertes der Leitfähigkeit sich beseitigen lassen. Mit diesem Vorbehalt werden wir in den nächsten Abschnitten der Theorie der Drahtwellen die soeben entwickelten Grenzbedingungen zugrunde legen, welche das Verschwinden der normalen Komponente von $\mathfrak{H}$ und der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ an der Oberfläche eines vollkommen leitenden Drahtes fordern.

§ 73. Fortpflanzung elektrischer Wellen längs zylindrischer Leiter.

Wir denken uns im Raume eine Anzahl von Leitern, die durch zylindrische Flächen mit parallelen Erzeugenden begrenzt sind. Im übrigen sei der Raum von einem homogenen isotropen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ε, der Permeabilität μ erfüllt. Die Leiter werden als unendlich gut leitend angenommen, so daß nur an ihrer Oberfläche Elektrizität und Leitungsstrom sich befindet; alsdann gelten an den durch die Leiteroberfläche gebildeten Begrenzungen des Dielektrikums die am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten Grenzbedingungen.

Wir legen die x-Achse den erzeugenden Geraden der zylindrischen Leiteroberflächen parallel und betrachten Wellen, die sich im Dielektrikum längs der x-Achse fortpflanzen. Diese Wellen sollen jetzt nicht homogen sein, d. h. es sollen die Feldstärken von y und z abhängen. Wir wollen annehmen, daß auch diese längs der zylindrischen Leiter fortschreitenden Wellen transversal sind, d. h. wir wollen die Komponenten

$\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ gleich Null setzen. Die Berechtigung dieser beiden Annahmen wird nachträglich dadurch zu beweisen sein, daß die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen sich durch ihre Einführung erfüllen lassen.

Die Differentialgleichungen (203a—d), die im Innern des Dielektrikums gelten, ergeben, wenn

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_x = 0$$

gesetzt wird,

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \tag{214}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \tag{214a}$$

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}, \tag{214b}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \tag{214c}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0, \tag{214d}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0. \tag{214e}$$

Die vier Gleichungen (214a, c) sind mit den Gleichungen (204a, b) identisch. Sie ergeben für die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ partielle Differentialgleichungen von der Form (204g, h). Letztere werden integriert, indem man z. B.

$$\mathfrak{E}_y = f(x - wt,\ y,\ z) \tag{215}$$

setzt, wobei

$$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{215a}$$

die Geschwindigkeit homogener ebener Wellen ist (205a).

Dieses partikuläre Integral entspricht Wellen, die mit der Geschwindigkeit w unverzerrt in Richtung der x-Achse fortteilen. Entsprechende Ausdrücke gelten auch für die anderen drei Komponenten. Aus der zugrunde gelegten Annahme der Transversalität der Wellen folgt demnach, daß

die Geschwindigkeit der Wellenphasen der Geschwindigkeit homogener ebener Wellen gleich ist und daß ihre Amplitude sich beim Fortschreiten nicht ändert. Kommt hingegen die Absorption der Energie in den Leitern in Betracht, so sind die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ nicht streng transversal.

Wir können jetzt die Betrachtung auf eine der Wellenebenen beschränken, welche die zylindrischen Leiter senkrecht schneiden. Die Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ sind hier nicht unabhängig voneinander, sondern sie sind durch die Differentialgleichungen (214b, e) miteinander verknüpft; andererseits müssen die Komponenten $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ den Differentialgleichungen (214), (214d) genügen. Hierzu treten die Grenzbedingungen, die an der Oberfläche der Leiter gelten. An den Schnittkurven s_1, s_2 ... der Leiteroberflächen mit der betrachteten Wellenebene muß die tangentielle Komponente von $\mathfrak{E}$ und die Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ gleich Null sein. Wir betrachten zunächst das elektrische Feld.

Nach (214b) verschwindet im Innern des Dielektrikums die x-Komponente vom Curl $\mathfrak{E}$; auch Flächenwirbel von $\mathfrak{E}$ an den Leiteroberflächen sind durch die Grenzbedingungen ausgeschlossen. Es ist demnach das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ für alle in Wellenebenen verlaufenden geschlossenen Kurven Null; dieser Vektor leitet sich, wenn man die Betrachtung auf solche Ebenen beschränkt, von einem einwertigen Skalar Φ ab:

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{215b}$$

Nach (214e) hat dieser Skalar der Gleichung zu genügen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{215c}$$

Längs der Schnittkurven der Leiteroberflächen soll den Grenzbedingungen zufolge der tangentielle Gradient von Φ Null sein, d. h. Φ soll auf den Kurven s_1, s_2 ... konstant sein. Sein normaler Gradient, integriert über die Schnittkurve, ergibt den von jener Kurve ausgehenden Kraftfluß

$$\int \mathfrak{E}_\nu \, ds_1 = -\int \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} ds_1.$$

Multipliziert man mit $\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot dx$, so erhält man den Verschiebungsfluß, der von einem Stücke des ersten Leiters von der Länge dx ausgeht. Wir wollen diesen Verschiebungsfluß gleich $e_1 \cdot dx$ setzen, indem wir unter e_1 die auf die Längeneinheit des ersten Leiters berechnete wahre Ladung verstehen. Entsprechende Bedeutung werde den Größen $e_2, e_3 \ldots$ beigelegt. Dann gilt

$$(215\mathrm{d}) \qquad e_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \int \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} ds_1, \quad e_2 = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \int \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_2} ds_2, \ldots$$

Es wird nun eine Funktion $\Phi(x, y)$ gesucht, welche der Differentialgleichung (215c) genügt, auf den Kurven $s_1, s_2 \ldots$ konstant ist und mit den Ladungen e_1, e_2 durch die Gleichungen (215d) verknüpft ist. Dieses Problem ist durchaus identisch mit dem elektrostatischen Probleme, bei gegebenen Ladungen der unendlichen zylindrischen Leiter das elektrostatische Potential zu bestimmen. Denn dieses elektrostatische Potential genügt der Laplaceschen Gleichung; da es von x unabhängig ist, so geht die Laplacesche Gleichung in ihre zweidimensionale Form (215c) über. Auch sonst sind die Bedingungen identisch. Wir schließen, da das elektrostatische Problem sich lösen läßt, daß die Funktion Φ jenen Bedingungen gemäß sich bestimmen lassen muß.

Hier muß jedoch eine Einschränkung gemacht werden, die wir bei der Behandlung der Elektrostatik, wo wir nur von Leitern endlicher Ausdehnung sprachen, nicht erwähnt haben. Es muß, damit das Problem eine physikalisch zulässige Lösung besitzt, die Summe der Ladungen

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots = 0$$

sein für einen jeden Querschnitt durch das Leitersystem. Um dieses einzusehen, konstruieren wir einen Kreiszylinder, der das ganze Leitersystem einschließt und dessen Querschnittradius R groß gegen die Abmessungen der Leiterquerschnitte und gegen ihre Abstände ist. Die elektrische Verschiebung, die aus der Längeneinheit des Zylinders heraustritt, ist gleich

$$\frac{e}{2\pi R},$$

d. h. das elektrische Feld ist auf dem Zylinder gleich dem einer geladenen Linie von der Ladung e pro Längeneinheit. Außerhalb des Zylinders gilt derselbe Ausdruck. Es nimmt also die elektrische Energiedichte mit wachsendem R ab, wie

$$\psi = \frac{1}{2}(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{D}^2 = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon R^2}.$$

Für die außerhalb des Zylinders befindliche elektrische Energie erhält man

$$\int_R^\infty 2\pi R dR \cdot \psi = \frac{e^2}{\varepsilon} \int_R^\infty \frac{dR}{R}.$$

Dieser Ausdruck wird aber logarithmisch unendlich, es sei denn, daß $e = 0$ ist. Um einen unendlichen Wert der Energie zu vermeiden, müssen wir annehmen, daß die Summe aller Ladungen, die zwischen zwei beliebigen, die Leiter senkrecht durchschneidenden Ebenen liegen, gleich Null ist. Beispiele sind das Kabel, dessen innerer und äußerer Zylinder entgegengesetzt geladen sind, oder zwei parallele, jeweils in gegenüberliegenden Querschnitten entgegengesetzt geladene Drähte. Wellen längs eines einzelnen Drahtes aber fallen nicht in den Gültigkeitsbereich der hier dargelegten Methode, weil bei solchen e notwendig von Null verschieden ist. Daß der Einzeldraht hier auszuschließen ist, liegt an den einschränkenden Annahmen unendlich guter Leitfähigkeit bzw. transversaler Wellen. Wir werden im zweiten Bande dieses Werkes sehen, daß die strenge, die endliche Leitfähigkeit berücksichtigende Theorie der Wellenfortpflanzung längs eines einzelnen Drahtes die Transversalität der Wellen aufgibt. Die hier auftretende Schwierigkeit, das Unendlichwerden der Energie, wird sich dort nicht einstellen.

Beschränken wir uns auf zwei Leiter, so ist

$$e_2 = -e_1$$

zu setzen. Wir verbinden zwei Punkte P_1, P_2 der beiden Leiter, die in demselben Querschnitte liegen, durch eine be-

liebige Kurve, die aber durchweg in einer zur x-Achse senkrechten Ebene verläuft. Dann ist das Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E}_s \, ds = \Phi_1 - \Phi_2$$

von dem Verlaufe der ebenen Kurve und der Lage der Punkte P_1, P_2 auf den beiden Leitern unabhängig. Wir wollen es als „Spannung" bezeichnen. Es entspricht der Potentialdifferenz der beiden Leiter in dem elektrostatischen Probleme, doch reden wir hier bei Drahtwellen besser nicht von einem Potentiale, weil das elektrische Feld hier keineswegs wirbelfrei ist; es verschwindet nur die x-Komponente von curl $\mathfrak{E}$, nicht aber die beiden anderen Komponenten. Haben wir das elektrostatische Problem für die beiden unendlichen zylindrischen Leiter gelöst, so kennen wir auch die Kapazität der Längeneinheit des Systemes, die durch

$$e_1 = K \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) \tag{215e}$$

definiert ist, und die elektrische Energie pro Längeneinheit der Leitung

$$U = \frac{1}{2}\left(e_1 \Phi_1 + e_2 \Phi_2\right) = \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{K}. \tag{215f}$$

Wir gehen nunmehr zum magnetischen Felde über, dessen Verteilung in der betreffenden Wellenebene den Differentialgleichungen (214), (214d) gemäß zu wählen ist. Der Differentialgleichung (214d), welche das Verschwinden des freien Magnetismus im Innern des homogenen Dielektrikums ausdrückt, genügen wir durch den Ansatz

$$\mu \mathfrak{H}_y = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \mu \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}. \tag{216}$$

Die Gleichung (214) geht hierdurch über in

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \tag{216a}$$

Konstruieren wir in der Wellenebene eine geschlossene Kurve s mit der Normalen ν, so ist

$$\int \mu \mathfrak{H}_\nu \, ds = \int \mathfrak{B}_\nu \, ds$$

die aus der geschlossenen Kurve heraustretende magnetische Induktion. Diese ist stets gleich Null, eine Tatsache, die in der Differentialgleichung (214d) ihren Ausdruck fand und in der Grenzbedingung, daß die Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ an den Schnittkurven der Wellenebene mit den zylindrischen Leiteroberflächen verschwindet. Berechnet man nun das Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_\nu \, ds$$

für eine ungeschlossene Kurve, welche einen Punkt P_1 des ersten Leiters mit einem Punkte P_2 des zweiten Leiters verbindet, so hat das Integral für zwei beliebige, in derselben Wellenebene liegende Kurven immer den gleichen Wert, wie auch die Punkte P_1, P_2 auf den beiden Leitern liegen mögen. Denn betrachtet man zwei solche Kurven P_1, P_2 und P_1', P_2' und fügt die betreffenden Stücke P_1, P_1' und P_2, P_2' der die Leiterquerschnitte begrenzenden Kurven s_1, s_2 hinzu, so verschwindet das Integral der magnetischen Induktion für die geschlossene Kurve $P_1 P_2 P_2' P_1' P_1$

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_\nu \, ds + \int_{P_2}^{P_2'} \mathfrak{B}_\nu \, ds_2 + \int_{P_2'}^{P_1'} \mathfrak{B}_\nu \, ds + \int_{P_1'}^{P_1} \mathfrak{B}_\nu \, ds_1 = 0.$$

Dabei ist ν die äußere Normale des begrenzten Flächenstückes. Ordnet man der Richtung der Kurven $P_1 P_2$ bzw. $P_1' P_2'$ eine bestimmte Normalenrichtung zu, in welcher der Induktionsfluß als positiv in Rechnung zu setzen ist, und berücksichtigt, daß auf s_1 und auf s_2 die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ verschwindet, so folgt

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_\nu \, ds = \int_{P_1'}^{P_2'} \mathfrak{B}_\nu \, ds.$$

Haben wir es nur mit zwei zylindrischen Leitern zu tun, so wollen wir den Wert dieses Integrales als „gesamten Induktionsfluß der Längeneinheit der Leitung“ bezeichnen. Nach (216) ist

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_\nu \, ds = \int_{P_1}^{P_2} (\mu \mathfrak{H}_y \cos \nu y + \mu \mathfrak{H}_z \cos \nu z) \, ds$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos (\nu y) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos (\nu z) \right) ds.$$

Ordnet man nun dem Fortschreitungssinn längs $P_1 P_2$ die Normalenrichtung ν derart zu, daß

$$\cos (\nu y) = - \cos (s z), \quad \cos (\nu z) = \cos (s y)$$

zu setzen ist, d. h. daß ν auf s folgt, wie die z-Achse auf die y-Achse, oder daß die magnetische Induktion als positiv angesehen wird, wenn sie sich dem im ersten Leiter (parallel der x-Achse) fließenden Strome J_1 der Ampèreschen Regel gemäß zuordnet, so folgt für den gesamten Induktionsfluß der Leitung

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}_\nu \, ds = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \, ds = \Psi_1 - \Psi_2. \tag{216b}$$

Kennen wir die Funktion Ψ, so können wir den gesamten Induktionsfluß der Leitung berechnen, mithin auch die durch die Gleichung

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{L}{c} J_1 \tag{216c}$$

zu definierende „Selbstinduktion L pro Längeneinheit der Leitung“.

Wir wollen die Bedingungen zusammenstellen, denen die Funktion Ψ zu genügen hat. Es ist erstens die Differentialgleichung (216a). Zweitens muß Ψ auf den Kurven s_1, s_2 konstant sein. Denn es gilt, wie soeben gezeigt wurde, allgemein

$$\mathfrak{B}_\nu = - \frac{\partial \Psi}{\partial s}.$$

Die Grenzbedingung, welche das Verschwinden der normalen magnetischen Induktion auf den Oberflächen der vollkommenen Leiter verlangt, wird daher dann und nur dann befriedigt, wenn Ψ auf s_1, s_2 konstant ist. Eine dritte Bedingung für Ψ erhalten wir, wenn wir die erste Hauptgleichung auf die den Querschnitt des ersten Leiters begrenzende Kurve s_1 anwenden. Es ist dann

$$\int \mathfrak{H}_{s_1} ds_1 = \frac{4\pi J_1}{c}.$$

Dabei ist der Umkreisungssinn so zu wählen, daß J_1 positiv in Richtung der x-Achse gerechnet wird, d. h. einer Drehung entsprechend, welche die y-Achse in die z-Achse überführt. Es folgt demnach s_1 auf die äußere Normale ν_1, wie die z-Achse auf die y-Achse, und es wird

$$\cos(\nu_1 y) = \cos(s_1 z), \quad \cos(\nu_1 z) = -\cos(s_1 y),$$

daher

$$\mathfrak{H}_{s_1} = \mathfrak{H}_y \cos(s_1 y) + \mathfrak{H}_z \cos(s_1 z)$$
$$= -\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\partial \Psi}{\partial y}\cos(\nu_1 y) + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\cos(\nu_1 z)\right\} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1}.$$

Daher wird

$$\text{(216d)} \qquad \begin{cases} J_1 = -\dfrac{c}{4\pi\mu}\cdot\displaystyle\int \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1}\cdot ds_1, \\ \quad \text{und entsprechend} \\ J_2 = -\dfrac{c}{4\pi\mu}\cdot\displaystyle\int \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_2}\cdot ds_2 \text{ usf.} \end{cases}$$

Es wird nun eine Funktion Ψ gesucht, welche der Differentialgleichung (216a) genügt, auf den Querschnittskurven $s_1, s_2, \ldots$ konstant ist und in dem durch (216d) angegebenen Zusammenhange mit den Stromstärken steht.

Denkt man sich die Verteilung des Flächenstromes, der senkrecht zu s_1, s_2 längs der Leiter fließt, durch einen stationären Strom verwirklicht, so würde dessen Feld in der betrachteten Wellenebene genau mit dem magnetischen Felde der Wellen übereinstimmen. Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ dieses stationären

Stromes würde parallel der x-Achse gerichtet sein. $\mathfrak{A}_x$ wäre von x unabhängig, so daß die Laplacesche Gleichung, der $\mathfrak{A}$ zu genügen hat, übergeht in

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = 0.$$

Identifiziert man Ψ mit $\mathfrak{A}_x$, so erhält man auf Grund der Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

die Gleichungen (216, 216a) und auch die Gleichungen (216d). Die Grenzbedingung, daß Ψ für s_1, s_2 konstant ist, gilt allerdings für den stationären Strom, der in den Leitern wirklich fließt, nicht, da dessen magnetisches Feld in das Innere der Leiter eindringt. Doch kann man die hier geforderte flächenhafte Stromverteilung annähernd durch röhrenförmige Leiter realisieren.

Der Form nach genau identisch sind jedoch die Bedingungen, die für die Funktionen Φ und Ψ gelten. Beide müssen auf s_1, s_2 konstant sein, im Dielektrikum derselben Differentialgleichung genügen und in dem durch (215d) bzw. (216d) formulierten Zusammenhange mit den Ladungen der Leiter bzw. den in den Leitern fließenden Strömen stehen. Ist das elektrische Feld der längs der Leitung fortschreitenden Wellen für beliebige Ladungen e_1, e_2 ... der Leiter bestimmt, so ergibt sich sofort das magnetische Feld, das gegebenen Strömen J_1, J_2 ... entspricht. Es gehen die für Ψ geltenden Gleichungen einfach aus den für Φ geltenden hervor, indem e_1 durch

$$J_1 \cdot \frac{\varepsilon \mu}{c},$$

e_2 durch

$$J_2 \cdot \frac{\varepsilon \mu}{c} \text{ usf.}$$

ersetzt wird. Der oben eingeführten einschränkenden Bedingung

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots = 0$$

entspricht hier die Bedingung

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \cdots = 0.$$

Dieselbe ergibt sich auch aus dem Prinzip des geschlossenen Stromes. In der Tat haben wir vorausgesetzt, daß die longitudinale Komponente von $\mathfrak{E}$ verschwindet; es werden daher die senkrecht zur Leitung verlaufenden Ebenen von Verschiebungsströmen nicht durchflossen. Durch eine jede solche unendliche Ebene muß demnach im ganzen derselbe Leitungsstrom parallel, wie entgegen der x-Achse fließen.

Besonders einfach liegen die Verhältnisse in dem uns hier vorwiegend interessierenden Falle, wo wir es mit zwei Leitern zu tun haben. Hier ist in den Durchschnitten der Wellenebene

$$e_2 = -e_1, \quad J_2 = -J_1.$$

Ist für eine gegebene Leitung die für das elektrische Feld maßgebende Funktion Φ gefunden, so ist die für das magnetische Feld maßgebende Funktion Ψ ohne weiteres anzugeben. Es ist einfach

$$J_1 \frac{\varepsilon\mu}{c}$$

statt e_1 zu schreiben, wodurch Φ in Ψ übergeht.

Haben wir Φ auf Grund der elektrostatischen Analogie berechnet, so ist nach (215e)

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1} = \frac{1}{K},$$

wo K, die Kapazität der Längeneinheit der Leitung, eine von e_1 unabhängige Konstante der Leitung ist. Nach dem soeben Gesagten folgt jetzt

$$\frac{\Psi_1 - \Psi_2}{J_1 \cdot \frac{\varepsilon\mu}{c}} = \frac{1}{K},$$

oder nach (216c)

(216e) $$LK = \varepsilon\mu.$$

Das Produkt aus Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit der Leitung ist gleich dem Produkte aus Dielektrizitätskonstante und magnetischer Permeabilität des Dielektrikums. — Da L und K auf die

Längeneinheit bezogen sind, so sind im Gaußschen Systeme beides reine Zahlen, so daß in Gleichung (216e) die Dimensionen beiderseits übereinstimmen. Wir können die Gleichung (215a) für die Geschwindigkeit der Wellen jetzt auch schreiben

$$w = \frac{c}{\sqrt{LK}}. \tag{216f}$$

Was die magnetische Energie pro Längeneinheit der Leitung anbelangt, so wird sie durch

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{c^2} \cdot J_1^2 \tag{216g}$$

gegeben.

Leitet man aus den beiden Funktionen Φ, Ψ vermöge (215b) und (216) das elektrische und das magnetische Feld ab, so werden, wie wir zeigten, die Feldgleichungen (214), (214b), (214d), (214e) erfüllt. Es bleibt nur übrig, zu beweisen, daß (214a, c) gleichfalls befriedigt sind. Diese Gleichungen lauten jetzt

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x}, \tag{217}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}. \tag{217a}$$

Dieselben sind erfüllt, wenn allgemein die Beziehungen

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{217b}$$

gelten.

Nun ist für eine Leitung, die aus zwei jeweils entgegengesetzt geladenen und von entgegengesetzten Strömen durchflossenen Leitern besteht,

$$\Phi = e_1 \cdot \Phi_0(y, z) \tag{217c}$$

zu setzen.

Dabei ist $\Phi_0(y, z)$ das elektrostatische Potential der beiden, mit den Ladungen

$$e_1 = +1, \quad e_2 = -1$$

pro Längeneinheit versehenen Leiter. Diese Darstellung für Φ folgt aus dem oben Dargelegten mit Rücksicht darauf, daß

die für Φ geltenden Bedingungsgleichungen linear sind. Entsprechend gilt, wie wir sahen

$$\Psi = J_1 \cdot \frac{\varepsilon\mu}{c} \cdot \Phi_0(y, z). \tag{217d}$$

Demgemäß geht (217b) über in

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = -\frac{\partial J_1}{\partial x}, \tag{217e}$$

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{\partial e_1}{\partial x}. \tag{217f}$$

In der Kirchhoffschen, auf den Anschauungen der Fernwirkungstheorie beruhenden Behandlung der elektrischen Wellen in Drähten wird die erste dieser Gleichungen daraus abgeleitet, daß die zeitliche Änderung der Ladung $e_1 dx$ eines Stückes dx gleich dem Überschuß des eintretenden über den austretenden Strom ist. Die zweite der Gleichungen aber ist nach (216e) identisch mit

$$-\frac{L}{c^2}\frac{\partial J_1}{\partial t} = \frac{1}{K}\frac{\partial e_1}{\partial x}. \tag{217g}$$

Diese wird auch in der Fernwirkungstheorie durch Anwendung des Induktionsgesetzes gewonnen. Wir sehen hier, daß die Maxwellsche Theorie, die vom Standpunkte der Nahewirkung aus die Drahtwellen betrachtet, im vorliegenden Falle zu Ergebnissen gelangt, die formal mit denen der Fernwirkungstheorie übereinstimmen.

Die Elimination von J_1 ergibt für e_1 die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2}, \tag{218}$$

deren allgemeine Lösung ist

$$e_1 = f(x - wt) + g(x + wt), \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{218a}$$

Die Gleichungen (217e, f) werden erfüllt, wenn außerdem gilt

$$J_1 = w \cdot \{f(x - wt) - g(x + wt)\}. \tag{218b}$$

Der allgemeinen Lösung entsprechen zwei Ladungs- und Stromwellen, die längs der Leitung in entgegengesetzten Rich-

tungen laufen. Durch Einführung in (217c, d) bestimmen sich die Funktionen Φ, Ψ, aus denen sich vermöge (215b) und (216) das elektromagnetische Feld ableitet. Die so erhaltene Lösung ist die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (214—214e), unter den vorliegenden Grenzbedingungen. Es ist also die allgemeinste Lösung der Feldgleichungen und der Grenzbedingungen, welche mit dem Verschwinden der longitudinalen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verträglich ist.

Wir betrachten die Wellen, die in Richtung der positiven x-Achse fortschreiten. Die elektrische Energie pro Längeneinheit der Leitung ist nach (215f), (218a)

$$U = \frac{1}{2}\frac{e_1^2}{K} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f^2(x-wt)}{K}. \tag{218c}$$

Die magnetische Energie pro Längeneinheit der Leitung hingegen ist nach (216g) und (218b)

$$T = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}\cdot J_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{\varepsilon\mu}\cdot f^2(x-wt). \tag{218d}$$

Nach (216e) folgt

$$T = U. \tag{218e}$$

Die magnetische Energie der Drahtwellen ist im vorliegenden Falle der elektrischen gleich. Die pro Sekunde durch eine feste Querschnittsebene hindurchtretende Energie ist

$$w(U+T) = w\cdot 2U = \frac{w\cdot f^2(x-wt)}{K},$$

oder nach (215e) und (218a, b)

$$J_1\cdot(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Der gesamte Energiestrom längs der Leitung ist das Produkt aus Stromstärke und Spannung.

Nach (217c, d) fallen die Kurvenscharen $\Phi = \text{constans}$, $\Psi = \text{constans}$ zusammen. Die Kurven der ersten Schar verlaufen orthogonal zu den elektrischen Kraftlinien, die Kurven der zweiten Schar sind die magnetischen Induktionslinien.

Letzteres folgt aus der bei der Ableitung von (216b) benutzten Relation

$$\mathfrak{B}_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial s};$$

denn durch die Kurven, längs deren Ψ konstant ist, tritt keine magnetische Induktion hindurch. Es stellen also die elektrischen Kraftlinien und die magnetischen Induktionslinien bei Wellen, die längs vollkommen leitender Zylinder in einem homogenen Dielektrikum fortschreiten, stets zwei zueinander orthogonale Kurvenscharen dar.

Wir behandeln jetzt die beiden wichtigsten Spezialfälle, das Kabel und die Paralleldrähte.

§ 74. Wellen in Kabeln.

Die Leitung, längs deren die Wellen fortschreiten, soll aus zwei konzentrischen, vollkommen leitenden Kreiszylindern bestehen. Es soll b der Querschnittsradius der äußeren Begrenzung des inneren Zylinders, a der Querschnittsradius der inneren Begrenzung des äußeren Zylinders sein. Es handelt sich nun darum, für dieses System das elektrostatische Problem zu lösen, d. h. das elektrostatische Feld zu bestimmen, das sich herstellt, wenn $+e_1$ die Ladung der inneren, $-e_1$ die Ladung des äußeren Zylinders pro Längeneinheit ist.

Da die beiden Zylinder als vollkommen leitend betrachtet werden, so ist das Feld auf den zwischen ihnen befindlichen, leeren oder von einem dielektrischen Körper erfüllten Raum beschränkt. Das Feld ist hier leicht anzugeben, da ja Symmetrie um die gemeinsame Achse der beiden Zylinder besteht. Legt man einen konzentrischen Zylinder vom Querschnittsradius r durch das Feld, so tritt durch die Längeneinheit des Zylinders der Verschiebungsfluß

$$e_1 = 2\pi r \cdot \mathfrak{D}_r = \frac{r \cdot \varepsilon}{2} \cdot \mathfrak{E}_r$$

hindurch. Es ist demnach die radiale elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{2e_1}{r\varepsilon} = +\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\, r\right).$$

Die anderen Komponenten von $\mathfrak{E}$ verschwinden nach Symmetrie, es ist daher das elektrostatische Potential

$$\Phi = -\frac{2e_1}{\varepsilon} \ln r, \tag{219}$$

mithin die Potentialdifferenz zwischen dem inneren und dem äußeren Zylinder

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\left(\frac{a}{b}\right), \tag{219a}$$

und die Kapazität der Längeneinheit des Kabels

$$K = \frac{e_1}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\varepsilon}{2\, ln\left(\frac{a}{b}\right)}. \tag{219b}$$

Die magnetischen Kraftlinien verlaufen in konzentrischen Kreisen um die Zylinderachsen. Der Betrag der Feldstärke ist nach der ersten Hauptgleichung

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2J_1}{cr},$$

mithin der gesamte Induktionsfluß pro Längeneinheit des Kabels

$$\int_b^a dr\mu \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{2\mu J_1}{c} \cdot \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{2\mu J_1}{c} \cdot ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Da anderseits die gesamte Induktion pro Längeneinheit durch

$$\frac{L}{c} \cdot J_1$$

ausgedrückt wird (vgl. 216c), so folgt

$$L = 2\mu\, ln\left(\frac{a}{b}\right) \tag{219c}$$

als Selbstinduktion pro Längeneinheit des Kabels.

Wie man sieht, genügen Kapazität und Selbstinduktion des Kabels (219b, c) der allgemeinen, im vorigen Paragraphen aufgestellten Beziehung

$$KL = \varepsilon\mu$$

(Gleichung 216e). Je kleiner der Quotient $\frac{a}{b}$ der Querschnittsradien der äußeren und inneren Begrenzung der dielektrischen Schicht ist, desto größer ist die Kapazität, desto kleiner die Selbstinduktion des Kabels.

§ 75. Wellen längs zweier paralleler Drähte.

Der Ausdruck (219) stellt das elektrostatische Potential einer gleichförmig geladenen unendlichen Geraden dar. Man überzeugt sich leicht davon, daß er der Differentialgleichung (215c) Genüge leistet. Wir können aus ihm sofort neue Lösungen dieser Differentialgleichung ableiten, indem wir die Potentiale paralleler Geraden superponieren. Wir denken uns z. B. durch zwei Punkte O_1 und O_2 senkrecht zu ihrer Verbindungslinie zwei Gerade gelegt, und diese mit den Ladungen $\pm e_1$ pro Längeneinheit versehen. Das elektrostatische Potential ist dann

$$\Phi = -\frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\, r_1 + \frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\, r_2 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right), \tag{220}$$

wenn r_1, r_2 die Abstände eines Aufpunktes P von den beiden Geraden bezeichnet. In Abbildung 11 ist ein Querschnitt durch die Punkte O_1 und O_2 gelegt; der Koordinatenanfang O

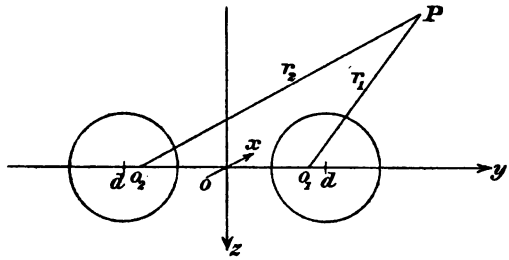


Abb. 11.

halbiert die Verbindungslinie $O_2 O_1$, deren Länge wir gleich 2η setzen wollen. $O O_1$ zeigt die Richtung der y-Achse an, die z-Achse ist gleichfalls in der Querschnittsebene gelegen, während die x-Achse den beiden Geraden parallel weist.

Die Punkte $O_1 O_2$ sind aus dem Felde auszuschließen, da in ihnen das Potential unendlich wird. Wir wollen sie in zwei zylindrische Flächen einhüllen, auf denen Φ konstant ist. Ersetzen wir diese Flächen durch die Oberflächen zweier leitender Zylinder, so erfüllt Φ bereits die an solchen Flächen dem elektrostatischen Potentiale vorgeschriebene Grenz-

bedingung. Aus dem um O_1 gelegten Zylinder dringt pro Längeneinheit die elektrische Verschiebung e_1, aus dem um O_2 gelegten die entgegengesetzte $-e_1$ heraus. Außerhalb der beiden Zylinder stellt demnach (220) das Potential des elektrostatischen Feldes dar, welches sich wirklich herstellt, wenn den beiden leitenden Zylindern die Ladungen $\pm e_1$ pro Längeneinheit gegeben werden.

Nun ist, wie aus der elementaren Geometrie bekannt ist, der geometrische Ort der Punkte, für die das Verhältnis $r_2 : r_1$ der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist, ein Kreis, der einen der beiden festen Punkte exzentrisch einschließt. Wir erhalten demnach aus (220) die Lösung des elektrostatischen Problems für den Fall zweier Kreiszylinder. Hieraus können wir, auf Grund der Entwickelungen des § 73, das Feld elektrischer Wellen längs zweier paralleler Drähte von kreisförmigem Querschnitt ableiten. Dabei dürfen sogar die Querschnittsradien der beiden Drähte verschieden sein; wir wollen uns indessen auf den Fall beschränken, daß sie beide gleich b sind, und wollen mit $2d$ den Abstand der Drahtachsen bezeichnen (vgl. Abbildung 11).

Der Abstand d der Drahtachsen von O ist offenbar durch $OO_1 = \eta$ und durch den Querschnittsradius b bestimmt. Da die beiden Durchschnittspunkte des O_1 einschließenden Kreises in Abbildung 11 die Strecke $O_2 O_1$ in demselben Verhältnis teilen, so gilt

$$\frac{\eta + d - b}{\eta - d + b} = \frac{d + b + \eta}{d + b - \eta},$$

oder

$$d^2 - (\eta - b)^2 = (\eta + b)^2 - d^2,$$

daher

$$d^2 = \eta^2 + b^2. \tag{220a}$$

Das Potential auf dem ersten Zylinder ist demnach

$$\Phi_1 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\left(\frac{d + b + \eta}{d + b - \eta}\right).$$

Drückt man η durch d und b aus, so wird

$$\frac{d + b + \eta}{d + b - \eta} = \frac{d + b + \sqrt{d^2 - b^2}}{d + b - \sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{d + b} + \sqrt{d - b}}{\sqrt{d + b} - \sqrt{d - b}} = \frac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b},$$

daher

$$\Phi_1 = \frac{2e_1}{\varepsilon} \cdot ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-b^2}}{b}\right). \tag{220b}$$

Auf dem anderen Zylinder hat $\frac{r_2}{r_1}$ den reziproken, Φ daher den entgegengesetzten Wert

$$\Phi_2 = -\Phi_1.$$

Es ist folglich die „Spannung“ zwischen den beiden Drähten

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{4e_1}{\varepsilon} \cdot ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-b^2}}{b}\right); \tag{220c}$$

die Kapazität der Längeneinheit der Leitung bestimmt sich aus

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e_1} = \frac{1}{K} = \frac{4}{\varepsilon} \cdot ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-b^2}}{b}\right). \tag{220d}$$

Aus (216e) folgt die Selbstinduktion der Längeneinheit der Leitung

$$L = \frac{\varepsilon\mu}{K} = 4\mu \cdot ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-b^2}}{b}\right). \tag{220e}$$

Ist der Querschnittsdurchmesser $2b$ klein gegen den Abstand $2d$ der Drahtachsen, so gelten die Näherungswerte

$$L = \frac{\varepsilon\mu}{K} = 4\mu \cdot ln\left(\frac{2d}{b}\right). \tag{220f}$$

In den Wellen, die sich längs der Paralleldrähte fortpflanzen, sind die Kurven, auf denen Φ konstant ist, eine Schar von Kreisen. Diese Kreise, zu denen auch die Begrenzungskreise der Drahtquerschnitte gehören, teilen harmonisch den Abstand $O_2 O_1$ zweier fester Punkte. Mit den zu den elektrischen Kraftlinien orthogonalen Kurven $\Phi = \text{constans}$ fallen die magnetischen Induktionslinien $\Psi = \text{constans}$ zusammen. Die elektrischen Kraftlinien, die orthogonal zu jenen Kreisen verlaufen, sind gleichfalls Kreise; dieselben gehen durch die festen Punkte O_1, O_2.

Die hier entwickelte Theorie beruht auf der Voraussetzung, daß die elektrischen Wellen nicht merklich in das Innere der

Drähte eindringen. Bei den schnellen Hertzschen Schwingungen, bei denen Paralleldrähte häufig zur Fortleitung der Wellen verwandt werden, trifft diese Voraussetzung mit großer Annäherung zu. Bei langsamen Schwingungen, z. B. in Fernsprechleitungen, ist diese Voraussetzung für dünne Drähte nicht mehr zulässig (vgl. § 72, Formel 212). Hier ist bei der Berechnung der Selbstinduktion das magnetische Feld im Drahtinnern zu berücksichtigen, und es ist der Einfluß des Widerstandes auf die Wellenfortpflanzung in Betracht zu ziehen.

§ 76. Kondensator am Ende der Leitung.

Wir haben bisher angenommen, daß die Leitung beiderseits ins Unendliche reicht. In Wirklichkeit hat man es natürlich stets mit Leitungsdrähten von endlicher Länge zu tun. Wir wollen annehmen, daß die Drähte in die einander gegenüberstehenden Platten eines Kondensators einmünden. Es sei K_0 die Kapazität des Kondensators, der bei $x = 0$ liegt. Von der Seite der negativen x treffe ein Zug einfach harmonischer Wellen ein. Wir stellen denselben mathematisch dar, indem wir für die willkürliche Funktion

$$f(x - wt)$$

des § 73 den komplexen Ausdruck setzen

$$f(x - wt) = A' \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}. \tag{221}$$

Nach (218a), (215e) ist dann die Spannung im einfallenden Wellenzuge gleich dem reellen Teile von

$$\Phi_1' - \Phi_2' = \frac{e_1'}{K} = \frac{A'}{K} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}. \tag{221a}$$

Der Strom aber ist nach (218b) gleich dem reellen Teile von

$$J_1' = w \cdot A' \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{x}{w}\right)}. \tag{221b}$$

Die einfallende Welle wird nun den am Ende der Leitung befindlichen Kondensator laden. Hierdurch wird zunächst der Welle Energie entzogen. Es wird sich jedoch alsbald ein

stationärer Schwingungszustand herstellen, wobei die Energie des Kondensators im Mittel konstant ist. Da Energieverluste durch Joulesche Wärme und durch Strahlung nicht in Betracht gezogen werden, so wird sich ein reflektierter, nach der Seite der negativen x hineilender Wellenzug ausbilden. Wir setzen für diesen

$$g(x + wt) = A'' \cdot e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}, \tag{222}$$

und gemäß (215e, 218a, b)

$$\Phi_1'' - \Phi_2'' = \frac{e_1''}{K} = \frac{A''}{K} \cdot e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}. \tag{222a}$$

$$J_1'' = -wA'' \cdot e^{i\nu\left(t + \frac{x}{w}\right)}. \tag{222b}$$

Die reellen Teile dieser Ausdrücke stellen den reflektierten Wellenzug dar.

Wir superponieren nun die beiden Wellen. Die resultierende Spannung $\Phi_1 - \Phi_2$ muß am Ende der Leitung ($x = 0$) der jeweiligen Ladung des Kondensators entsprechen. Ist e_0 die Ladung der mit dem ersten Drahte verbundenen Kondensatorplatte, so ist hier

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_1' - \Phi_2' + \Phi_1'' - \Phi_2'' = \frac{e^{i\nu t}}{K}\left(A' + A''\right) = \frac{e_0}{K_0}. \tag{223}$$

Die resultierenden Stromstärken $\pm J_1$ anderseits müssen der zeitlichen Änderung der Ladungen $\pm e_0$ der Kondensatorplatten gleich sein:

$$J_1 = J_1' + J_1'' = w \cdot e^{i\nu t}(A' - A'') = \frac{de_0}{dt} = i\nu \cdot e_0. \tag{223a}$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{A' - A''}{A' + A''} = \frac{i\nu}{w} \cdot \frac{K_0}{K},$$

daher

$$\frac{A''}{A'} = \frac{1 - \frac{i\nu}{w} \cdot \frac{K_0}{K}}{1 + \frac{i\nu}{w} \cdot \frac{K_0}{K}}. \tag{223b}$$

So bestimmt sich aus den am Ende der Leitung vorgeschriebenen Bedingungen das Verhältnis der komplexen Konstanten A'', A', die für Amplitude und Phase der reflektierten und der einfallenden Welle maßgebend sind. Die absoluten Beträge, daher auch die Spannungs- und Stromamplituden der beiden Wellen sind die gleichen. Wir können setzen

$$A' = |A| \cdot e^{\gamma i}, \quad A'' = |A| \cdot e^{-\gamma i} \tag{223c}$$

und erhalten

$$\frac{A''}{A'} = \frac{1 - i \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 + i \cdot \operatorname{tg} \gamma},$$

folglich

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\nu}{w} \cdot \frac{K_0}{K}. \tag{223d}$$

Dabei gibt 2γ den Phasenvorsprung an, um den am Ende der Leitung die Spannung der einfallenden Welle derjenigen der reflektierten Welle voreilt.

Die resultierende Spannungsverteilung längs der Leitung wird gegeben durch

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 2 \frac{|A|}{K} \cdot \cos\left(\frac{\nu x}{w} - \gamma\right) \cdot \cos(\nu t) \tag{224}$$

und die Stromverteilung durch

$$J_1 = -J_2 = w \cdot 2 |A| \cdot \sin\left(\frac{\nu x}{w} - \gamma\right) \cdot \sin(\nu t), \tag{224a}$$

wie durch Superposition der komplexen Ausdrücke für die Spannungen und Ströme der beiden Wellen und durch Absonderung der reellen Teile folgt.

Wir ziehen zwei Grenzfälle in Betracht. Der erste Grenzfall soll der sein, wo die Endkapazität K_0 gleich Null ist. Hier ergibt (223d), daß $\gamma = 0$ ist, d. h. daß für $x = 0$ die Spannungsphasen der einfallenden und der reflektierten Welle einander gleich sind. Die Stromstärken der beiden Wellen sind dann für $x = 0$ in entgegengesetzten Phasen. Demgemäß befindet sich nach (224) in diesem Falle am Ende der Leitung ein Spannungsbauch, nach (224a) ein Stromknoten.

Der andere Grenzfall ist $K_0 = \infty$. Hier wird $\gamma = \frac{\pi}{2}$, die Spannungen der beiden Wellen für $x = 0$ haben die Phasendifferenz $2\gamma = \pi$, die Stromstärken sind in gleichen Phasen. Demgemäß ist das Ende der Leitung ein Spannungsknoten und ein Strombauch.

Im allgemeinen Falle verhalten sich die Spannungsphasen so, als ob die Endkapazität beseitigt, d. h. $K_0 = 0$ gesetzt wäre, dafür aber die Leitung um die Strecke

$$\gamma \frac{w}{\nu} = \gamma \cdot \frac{\tau w}{2\pi} = \gamma \frac{\lambda}{2\pi} \tag{224b}$$

verlängert wäre. Dann würde in der Tat die reflektierte Welle, welche diese Strecke zweimal durchlaufen hat, erst dann bei $x = 0$ eintreffen, wenn die Spannung der einfallenden Welle bereits den Phasenvorsprung 2γ gewonnen hat. Im Grenzfalle $K_0 = \infty$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ würde die Verlängerung der Leitung, welche der Endkapazität äquivalent ist, ein Viertel der Wellenlänge betragen.

Wir wollen uns nun die Leitung auch auf der Seite der negativen x begrenzt denken, und zwar wollen wir an diesem Ende einen Spannungsknoten der stehenden Schwingung annehmen. Ein solcher ist, wie erwähnt, durch Einschaltung eines Kondensators von sehr großer Kapazität zu erzielen. Bei Leitungen, die aus zwei Paralleldrähten bestehen, stellt man am Ende der Leitung nahezu einen Spannungsknoten her, indem man die Drähte dort leitend überbrückt. Bei dieser letzteren Anordnung werden die Belegungen des bei $x = 0$ befindlichen Kondensators durch den aus den Paralleldrähten und der Brücke bestehenden Schließungskreis leitend verbunden. Die in einem solchen Kreise möglichen stehenden Schwingungen werden durch (224), (224a) dargestellt.

Wir denken uns den Spannungsknoten bei $x = -l$ gelegen. Die Werte von l, in denen bei gegebener Frequenz ν Spannungsknoten sich befinden, sind bestimmt durch

$$-\frac{\nu l}{w} - \gamma = -\frac{\pi}{2} + m\pi, \tag{225}$$

wo m eine ganze Zahl ist; der erste Spannungsknoten entspricht $m = 0$, der zweite $m = 1$, usf.

Ist anderseits die Länge l der Paralleldrähte gegeben, gerechnet vom Spannungsknoten bis zur Endkapazität K_0, so ergibt (225) in Verbindung mit (223d) die Frequenzen ν der möglichen Eigenschwingungen. Diese sind bestimmt durch die transzendente Gleichung

$$\text{(225a)} \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\nu l}{w}\right) = \frac{\nu}{w} \cdot \frac{K_0}{K}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\text{(225b)} \qquad \frac{\nu l}{w} = \frac{2\pi l}{\lambda} = \xi$$

und ferner

$$\text{(225c)} \qquad \alpha = \frac{Kl}{K_0}.$$

Dann wird (225a)

$$\text{(225d)} \qquad \xi \cdot \operatorname{tg} \xi = \alpha.$$

Diese Gleichung bestimmt die Wellenlängen der Eigenschwingungen. Dabei ist α das Verhältnis der Kapazität $K \cdot l$ der Paralleldrähte zur Kapazität K_0 des Kondensators.

Ist α sehr klein, d. h. kommt die Kapazität der Leitung nicht gegen die Kapazität des Kondensators in Betracht, so ergibt (225d)

$$\xi = \sqrt{\alpha}$$

als kleinste Wurzel. Setzt man hier

$$\xi = \frac{2\pi l}{w\tau} = \frac{2\pi l \cdot \sqrt{LK}}{c\tau} \quad \text{(vgl. 216f)},$$

so wird

$$\frac{2\pi \cdot \sqrt{lL}}{c\tau} = \sqrt{\frac{1}{K_0}}$$

oder

$$\text{(225e)} \qquad \tau = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{lL \cdot K_0}.$$

Wir erhalten also, wenn wir die Kapazität des Schließungskreises vernachlässigen, für die Grundschwingung die Thomsonsche Formel (192d); denn $l \cdot L$ ist hier die Selbstinduktion

der Paralleldrähte, da ja L die auf die Längeneinheit berechnete Selbstinduktion bedeutet.

Die Formel (225d) stellt nun die Verallgemeinerung der Thomsonschen Formel dar, die sich durch Berücksichtigung der Kapazität des Schließungskreises ergibt. Neben der Grundschwingung läßt sie eine Reihe von Oberschwingungen als möglich voraussehen.

Jene Formel wurde zuerst von G. Kirchhoff aus der Fernwirkungstheorie abgeleitet, und zwar für beliebige Form des Schließungsbogens. Wir haben uns bei ihrer Ableitung aus der Maxwellschen Theorie auf eine ganz spezielle Anordnung beschränken müssen, nämlich auf den Fall, daß der Schließungskreis aus zwei Paralleldrähten und einer kurzen Brücke besteht. Für diese Anordnung hat der Begriff der Leitungskapazität eine ganz bestimmte Bedeutung (vgl. § 73). Für beliebige Form des Schließungskreises jedoch und für Abmessungen desselben, die nicht klein gegen die Wellenlänge sind, schwebt der Begriff der Kapazität und Selbstinduktion der Leitung ganz in der Luft. Das hängt damit zusammen, daß im allgemeinen von einem solchen Schließungskreise Wellen in den Raum hinausgesandt werden und daß die elektromagnetische Energie der Schwingung nicht auf die unmittelbare Nachbarschaft des Leitungskreises zusammengedrängt ist. Der Einwand, der am Schlusse des § 66 gegen die auf der Theorie des quasistationären Stromes fußende Thomsonsche Behandlung der Kondensatorentladung erhoben wurde, ist auch gegen die Kirchhoffsche Verallgemeinerung geltend zu machen, da auch diese auf die ausgesandte Strahlung keine Rücksicht nimmt. Allein gerade der hier behandelte Fall zweier paralleler Drähte, die jeweils von entgegengesetzt gleichen Strömen in gegenüberliegenden Querschnitten durchflossen werden, ist diesem Einwande nicht ausgesetzt. Hier hat die magnetische Energie in der unmittelbaren Umgebung der Leitung ihren Sitz; die Strahlung ist zu vernachlässigen. Das kann allerdings an dieser Stelle noch nicht

gezeigt werden, sondern erst im zweiten Bande dieses Werkes, wo die Theorie der elektromagnetischen Strahlung ausführlich entwickelt werden soll.

§ 77. Der Poyntingsche Energiestrom.

Seit langer Zeit verband sich mit der Auffassung der Naturerscheinungen eine meistens freilich recht unklare Vorstellung von dem, was wir heute Energie nennen — zum mindesten seit der Zeit, in der man zu der Überzeugung von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile gelangt war. Diese Vorstellungen wurden gerichtet und zum großen Teile auch berichtigt durch jene großen Entdeckungen in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, besonders durch die Helmholtzsche Schrift über die „Erhaltung der Kraft". Aber sie wurden dadurch noch nicht in feste, unveränderliche Formen gebracht.

Die kinetische und potentielle Energie der Materie war es, deren Eigenschaften man zuerst kennen lernte. Man versuchte daher, jede Energieform als an einen Stoff gebunden vorzustellen. Dieser Vorstellung entsprach die Hypothese eines stofflichen Äthers, die der älteren Form der Wellentheorie des Lichtes zugrunde liegt; diese schrieb dem Äther Elastizität und Trägheit zu; die Energie der Lichtwellen setzt sich dieser Theorie zufolge aus der kinetischen und der potentiellen Energie jenes fingierten Stoffes zusammen.

Die elektromagnetische Lichttheorie bedient sich zwar auch des Wortes „Äther". Aber sie versteht darunter keineswegs einen Stoff von der Art der gewöhnlichen Materie. Sie bedient sich (vgl. § 38) dieses Wortes nur, um ohne Weitschweifigkeiten von denjenigen Eigenschaften des Raumes reden zu können, die sich in den elektromagnetischen Erscheinungen kundgeben. Diese Eigenschaften finden ihren mathematischen Ausdruck in den Feldgleichungen; sie enthalten nicht nur die Gesamtheit der altbekannten Gesetze der Elektrostatik und Elektrodynamik; auch die Gesetze der Lichtfortpflanzung im Raume sind in ihnen enthalten. Um diese

Vorgänge mit dem Energieprinzip in Einklang zu bringen, mußten zwei neue Energiearten, die elektrische und die magnetische Energie, eingeführt werden. Es zwingt indessen nichts dazu, einen stofflichen Träger dieser Energieformen anzunehmen.

Die Eigenschaften des „Äthers" sind in der Tat durchaus von denen der „Materie" verschieden. Die Elemente der Materie besitzen die Eigenschaft, chemische Verbindungen einzugehen. Die „Chemie des Äthers" hingegen, von der man wohl gesprochen hat, ist bisher nur ein Wort ohne Inhalt geblieben. Die Hauptsätze der Thermodynamik reichen allerdings weiter. Sie finden nicht nur auf die in den materiellen Körpern enthaltene Wärme Anwendung, sondern auch auf die Wärmestrahlen, welche wir als besondere Art elektromagnetischer Wellen betrachten. Indessen auch hier bemerken wir einen wesentlichen Unterschied zwischen „Materie" und „Äther": die Materie emittiert und absorbiert Licht und Wärme; die elektromagnetischen Wellen im Raume tragen das Licht und die Wärme vom emittierenden zum absorbierenden Körper. Die Annahme eines stofflichen Trägers der Wellen würde diesen Unterschied verwischen, ohne sonst aufklärend zu wirken.

In Wirklichkeit besteht die Welt aus der Materie und dem elektromagnetischen Felde im Raume. Wäre das elektromagnetische Feld nicht vorhanden, so würde uns das Auge die Anwesenheit der Materie nicht anzeigen. Denken wir uns die Materie beseitigt, so würden auch keine Lichtwellen in den Raum entsandt werden, es würde absolute Finsternis eintreten. Die von Vorurteilen freie Betrachtung wird die Naturvorgänge als Wechselwirkungen der Materie und des elektromagnetischen Feldes zu begreifen suchen.

Die einseitige materialistische Auffassung faßt die Wechselwirkung der Bestandteile der Materie als das Wesentliche auf. Sie betrachtet die Theorie des elektromagnetischen Feldes nur als Hilfsmittel, welches dazu dient, die Gesetze dieser Wechselwirkung zu formulieren und die zeitliche Fortpflanzung der Wirkung einzuführen. Die Materie ist ihr das einzig Wirkliche.

Mit demselben Rechte aber kann man die Sache von der entgegengesetzten Seite ansehen. Man kann das elektromagnetische Feld als das einzige wahre hinstellen und die Materie als elektromagnetisches Feld besonderer Art erklären, etwa als zusammengesetzt aus positiven und negativen Kraftlinienkernen. Auch diese elektromagnetische Auffassung ist gewiß einseitig, aber es ist nützlich, auch sie zu pflegen, um nicht in das entgegengesetzte, materialistische Extrem zu verfallen. Für die elektromagnetische Weltanschauung spricht jedenfalls der Umstand, daß unser Wissen vom elektromagnetischen Felde weit umfassender und weit klarer ist, als unser Wissen von der Materie.

Wir wollen es vermeiden, uns der einen oder der anderen Auffassung unbedingt zu verschreiben. Wir sehen daher davon ab, von einem stofflichen Träger der elektromagnetischen Energie zu reden. Wir richten vielmehr unser Augenmerk auf die Bewegung der elektromagnetischen Energie selbst.

Das Energieprinzip legt es nahe, die Energie als eine Substanz zu betrachten. In einem abgeschlossenen elektromagnetischen Systeme bleibt die Menge der Energie konstant, ebenso wie die Menge der Materie in einem abgeschlossenen materiellen System. Von der Materie wissen wir ferner, daß sie sich nur kontinuierlich im Raume bewegen kann; ein sprungweiser Übergang von einem Punkte zum anderen, ohne Durchquerung des dazwischen liegenden Raumes, ist ausgeschlossen. Ein sprungweiser Übergang der Energie von einem Punkte zu einem anderen ist a priori nicht unmöglich. Die Fernwirkungstheorie der Schwerkraft z. B. sieht es als möglich an, daß ein Körper einem anderen entfernten ohne Vermittelung des Raumes eine Beschleunigung erteilt, d. h. kinetische Energie zuführt. Die Maxwellsche Nahewirkungstheorie des elektromagnetischen Feldes jedoch läßt einen solchen diskontinuierlichen Übergang der Energie nicht zu. Sie führt zu der Konsequenz, daß die Energie im elektromagnetischen Felde sich nur kontinuierlich von Ort zu Ort bewegen kann mit einer endlichen Geschwindigkeit. Beispiele

für solche Bewegungen haben wir in den letzten Paragraphen kennen gelernt.

Eine allgemeine Theorie der Energieströmung im elektromagnetischen Felde ist von Poynting entwickelt worden. Bevor wir zu ihrer Darlegung übergehen, wollen wir uns vergegenwärtigen, wie die Energie im Bereiche der gewöhnlichen Mechanik ponderabler Körper sich überträgt. Wir müssen natürlich dabei solche Beispiele wählen, wo der Mechanismus der Kraftübertragung wohlbekannt ist; Fernkräfte, bei denen der Mechanismus der Übertragung uns verborgen ist, ziehen wir nicht in Betracht.

Wenn man sagt, daß eine Welle in der Transmissionsanlage einer Fabrik so und so viele Pferdestärken überträgt, läßt sich dies auch dahin ausdrücken, daß sie einen Energiestrom von entsprechender Größe ihrer Längsrichtung nach fortleitet. Bezeichnen wir das Torsionsmoment der Welle mit M, die Winkelgeschwindigkeit mit u, so wird der Energiestrom S, d. h. die in der Zeiteinheit von der Welle übertragene oder fortgeleitete Energie

$$S = M \cdot u.$$

Hängt ferner ein Gewicht mg an einem Seile und ziehen wir das Gewicht damit in die Höhe, so geht von der Stelle, wo die eingeprägte Kraft wirkt (also etwa von der Winde aus), nach dem Gewichte hin ein Energiestrom vom Betrage

$$S = mg \cdot v,$$

wenn v die Geschwindigkeit der Bewegung bezeichnet. Allgemein läßt sich der Energiestrom, der von einem gespannten Seile fortgeleitet wird, in Vektorform schreiben

$$\mathfrak{S} = - mg \cdot \mathfrak{v}.$$

Der Energiestrom ist stets der Bewegung des Seiles entgegen gerichtet; mg ist ein Maß für die Spannung des Seiles.

Hier war von dem ganzen fortgeleiteten Energiestrome die Rede; man kann ihn aber auch auf die Flächenelemente beziehen und unter $\mathfrak{S}$ die Dichte dieses Stromes verstehen,

d. h. die Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Wellen- oder Seilquerschnittes tritt.

In einer Röhrenleitung, die unter hohem Drucke stehendes Wasser, das etwa zum Betriebe hydraulischer Hebewerke dienen soll, in horizontaler Richtung fortleitet, geht ein Energiestrom, der mit der Wasserbewegung gleich gerichtet ist und dessen Stromdichte

$$\mathfrak{S} = p \cdot \mathfrak{v}$$

ist, wenn p den Wasserdruck in Dynen pro Quadratzentimeter bedeutet.

Die Arme eines Zahnrades oder einer Riemenscheibe leiten einen Energiestrom in radialer Richtung zu oder von der Welle, auf der sie festgekeilt sind. Die Berührungsflächen zwischen den Zähnen von zwei Zahnrädern, die ineinander greifen, bilden die Eintritts- bzw. Austrittsstellen des Energiestromes; sie sind mit den Gleitstellen zu vergleichen, die beim Fortleiten eines elektrischen Stromes z. B. zwischen dem Kommutator einer Dynamomaschine und einer Stromabnehmerbürste vorkommen.

Ein Teil des Energiestromes in der vollständigen Maschinenanlage einer Fabrik wird unterwegs zur Überwindung der Reibung verbraucht. Der Energiestrom hat hier Konvergenzstellen, in denen ein Teil der Energie verschwindet. Der Rest gelangt zu den Werkzeugen der sogenannten Arbeitsmaschinen, welche die zugeführte Energie wieder mit einem gewissen Reibungsverluste zur Arbeitsleistung ausnutzen.

Man könnte diese Beispiele leicht vermehren; das Gesagte beweist aber schon zur Genüge, daß die beschriebene Auffassung der Energieübertragung in der Tat von Nutzen ist und vielleicht mehr, als dies seither geschah, in der gewöhnlichen Mechanik gepflegt werden sollte. Diese Erkenntnis wird uns dahin führen, die Bedeutung der nachfolgenden Betrachtungen über den Energiestrom im elektromagnetischen Felde besser zu würdigen.

Wir knüpfen an die Gleichung (180d) des § 60 an, die unmittelbar aus den Feldgleichungen und Energieausdrücken

abgeleitet war, welche in ruhenden, nicht ferromagnetischen Körpern gelten:

$$(226)\quad \frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi}\cdot\int df[\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]_n + \int dv(\mathfrak{E}^e, \mathfrak{i}) - Q.$$

Dabei ist f die Oberfläche des Raumes v, der von beliebigen Leitern oder Isolatoren eingenommen ist. Das zweite Glied der rechten Seite stellt die Arbeit dar, welche von den in diesen Körpern wirkenden eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ geleistet wird; das dritte Glied subtrahiert von dieser Arbeit die Joulesche Wärme Q. Haben wir es mit einem abgeschlossenen elektromagnetischen Systeme zu tun, so ist der Überschuß der geleisteten Arbeit über die entwickelte Wärme gleich der entstandenen elektromagnetischen Energie, wie es das Energieprinzip verlangt (vgl. § 60). Ist aber auf der Fläche f, welche das betrachtete Gebiet des Feldes einschließt, elektromagnetische Erregung vorhanden, so tritt ein (positiver oder negativer) Energieverlust ein. Dieser Energieverlust wird der gesamten Energieströmung gleich zu setzen sein, welche pro Sekunde die geschlossene Fläche f von innen nach außen durchströmt.

Setzen wir nun mit Poynting für den Energiestrom pro Sekunde und Flächeneinheit

$$(226a)\quad \mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}-\mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}\right],$$

so führt die Integration über die geschlossene Fläche f stets zu dem richtigen Werte des gesamten, durch die Fläche tretenden Energieflusses. Es ist allerdings dieses nicht die einzige mögliche Verteilung des Energiestromes; man könnte vielmehr stets eine quellenfreie Strömung hinzufügen, da eine solche durch jede geschlossene Fläche den Gesamtstrom Null senden, daher in (226) herausfallen würde.

Dennoch werden wir den Poyntingschen Ausdruck der Energieströmung allgemein akzeptieren; waren wir doch bereits in § 69 bei der Behandlung ebener homogener elektromagnetischer Wellen in Isolatoren zu einem Ausdrucke gelangt (205g), der aus (226a) hervorgeht, wenn eingeprägte elektrische Kräfte

fehlen. Wir hatten gezeigt, daß die Richtung dieses Vektors, im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie gesprochen, dem Lichtstrahl entspricht und daß seine Komponente nach irgendeiner Richtung der Strahlung gleich ist, die pro Sekunde von der Flächeneinheit einer senkrecht zu dieser Richtung gestellten Fläche aufgefangen wird. Denken wir uns das Innere der Fläche f von Lichtwellen erfüllt und die Fläche selbst durch eine innen berußte Wand verwirklicht, die alles auffallende Licht absorbiert, so würde die Normalkomponente von $\mathfrak{S}$ die pro Sekunde in der Flächeneinheit der berußten (schwarzen) Fläche entwickelte Wärme darstellen. Hier gewinnt also der Poyntingsche Energiestrom eine unmittelbare physikalische Bedeutung. In einem beliebigen elektromagnetischen Felde trifft das nicht immer zu. Hier ergibt der Poyntingsche Vektor $\mathfrak{S}$ bisweilen Energieströme in geschlossenen Bahnen, die durch nichts ihre Existenz verraten. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist ein System, das aus einem isolierten geladenen Leiter und einem Magneten besteht. Im Luftraume ergibt hier (226a) einen dauernden Energiestrom senkrecht zu den elektrischen und zu den magnetischen Kraftlinien. Die Energie jedes einzelnen Volumelementes aber bleibt konstant, so daß Quell- oder Senkpunkte der Energieströmung nicht auftreten.

Jedenfalls gibt die Integration von $\mathfrak{S}_n$ über eine geschlossene Fläche immer die dem Inneren der Fläche entströmte Energie, oder die Gesamtstrahlung richtig an. Auch dürfte es keinen anderen Ausdruck des Energiestromes geben, der dasselbe für ein beliebiges elektromagnetisches Feld in ebenso einfacher Weise leistet. Denn die Nahewirkungstheorie muß von einem solchen Ausdrucke verlangen, daß er den Energiestrom nur von den elektrischen und magnetischen Vektoren abhängig macht, die an der betreffenden Stelle gerade herrschen. Wir werden den Poyntingschen Vektor daher allgemein als Maß des elektromagnetischen Energiestromes verwenden. Es wird nützlich sein, die Konsequenzen der Poyntingschen Theorie an konkreten Beispielen zu entwickeln.

§ 78. Der Energiestrom in der Umgebung eines elektrischen Stromes.

Daß ein elektrischer Strom Energie seiner Längsrichtung nach überträgt, ist gerade das, was wir von dem elektrischen Strome am genauesten und sichersten wissen. Fraglich ist nur, wie sich dieser Energiestrom im einzelnen verteilt, vor allem, ob die Fortleitung der Hauptsache nach in dem Metall oder in dem umgebenden Dielektrikum erfolgt. Früher galt es einfach als selbstverständlich, daß die Energie denselben Weg verfolge, wie der elektrische Strom selbst, also durch die Metallmasse hindurchgehe. Die Maxwellsche Theorie lehrt jedoch, daß der Sitz der elektrokinetischen Energie das umgebende Dielektrikum ist. Die Poyntingsche Theorie führt diese Vorstellung weiter aus, indem sie das Dielektrikum als Energieleiter betrachtet. Bei der Behandlung der elektrischen Drahtwellen (§ 73) fanden wir in der Tat, daß das elektromagnetische Feld in die Leitungsdrähte nicht eindringt, daß die Energie sich im Dielektrikum längs der Drähte fortpflanzt. Dabei hatten wir allerdings auf den Widerstand der Drähte keine Rücksicht genommen; würden wir ihn einführen, so würde sich ergeben, daß in den Leitungsdrähten Joulesche Wärme entwickelt wird, daß ein entsprechender Teil der Energie den Wellen entzogen wird, und daß hierdurch eine Dämpfung und eine geringfügige Verzögerung der Wellen bedingt wird. Hiervon abgesehen, hat man es mit einem im Dielektrikum sich abspielenden Vorgange zu tun.

Man hat den Energiestrom durchaus zu trennen von dem elektrischen Strome. Der elektrische Strom kann nur in den Kupferdrähten fließen, nur auf diesen können elektrische Ladungen sich ansammeln. Daher müssen die magnetischen Kraftlinien die Drähte umschlingen, die elektrischen Kraftlinien auf den Drähten entspringen und endigen. So bilden die Drähte hier den Kern des elektromagnetischen Feldes und leiten in diesem Sinne nicht nur die Elektrizität, sondern auch die Energie; sie geben nämlich dem Energie-

strome die Richtung. Dennoch sind im allgemeinen nicht die Metalle, sondern die Dielektrika als Leiter des Energiestromes zu bezeichnen. Denn wir wissen, daß die elektrischen Wellen durch Metallplatten nicht durchdringen, daß sie aber in Isolatoren sich fortpflanzen können. Die Metalle sind demnach Nichtleiter des Energiestromes, aber Leiter der Elektrizität. Die Dielektrika sind Leiter des Energiestromes, aber Nichtleiter der Elektrizität. Ähnlich liegt die Sache ja auch bei den Energieströmen der Mechanik, von denen wir im vorigen Paragraphen sprachen. So geht der Energiestrom in einem Zahnrade oder in einer Riemenscheibe in radialer Richtung vor sich, während die Bewegung, die zu dem Energiestrome Veranlassung gibt, eine Rotation ist. Der „Massenstrom" der ponderablen Materie ist hier zu trennen von dem Energiestrome. Die Energie wird hier nicht immer von den Massen bei ihrer Bewegung einfach mitgeführt, sondern sie strömt unter Umständen in ganz anderen Bahnen, wie die Massen. So fällt auch die Richtung des elektromagnetischen Energiestromes keineswegs immer mit der Richtung der Elektrizitätsbewegung zusammen.

Wir betrachten einen Stromring, in welchen von eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}^e$ ein stationärer Strom unterhalten wird. Die totale, für den Strom maßgebende elektrische Kraft ist hier nach Gleichung (161)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e.$$

Nach (226a) ist hier die elektrostatische Feldstärke

$$\mathfrak{E}^s = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e$$

für den Energiestrom maßgebend.

Wir denken uns ein Stück unseres linearen Leiters und berechnen die Energie, die in den Leiter aus dem Dielektrikum eintritt. Die magnetischen Kraftlinien umschlingen den Leiter; das Linienintegral der magnetischen Feldstärke ist nach der ersten Hauptgleichung für alle Querschnitte gleich $\frac{4\pi J}{c}$. Für die ins Innere des Drahtes tretende Energie ist nur die

tangentielle Komponente der elektrostatischen Feldstärke maßgebend, die gleich dem Potentialgefälle $-\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ längs des Drahtes ist. Die Energie, die nach dem Poyntingschen Satze in das Stück ds des Drahtes tritt, ist daher

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot J \cdot ds;$$

die Integration ergibt

$$J \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

für die in das Drahtstück pro Sekunde eintretende Energie. Ist dieses Drahtstück thermisch und chemisch homogen, also von eingeprägten Energiekräften frei, so stellt nach (154)

$$J(\varphi_1 - \varphi_2)$$

die entwickelte Joulesche Wärme Q dar. Ist aber das Stück die Trennungsschicht zweier Leiter, d. h. der Sitz der eingeprägten Kontaktkraft, so wird nach (161b) die einströmende Energie

$$J(\varphi_1 - \varphi_2) = -J \cdot E_{12}.$$

Geht also der Strom im Sinne der Kontaktkraft E_{12}, so strömt hier nicht Energie ein, sondern aus. Es strömt demnach überall dort, wo die den elektrischen Strom unterhaltenden elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben, Energie in das Feld hinein; längs des ganzen Drahtes strömt anderseits Energie aus dem Felde in den Draht ein, um dort in Joulesche Wärme verwandelt zu werden. Bei räumlich verteilten elektromotorischen Kräften überlagern sich diese beiden Energieströme. Die in den ganzen Leitungskreis in Summa eintretende Energie ist

$$J(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

denn das elektrostatische Potential ist einwertig, es verschwindet also $\varphi_1 - \varphi_2$, wenn Anfangs- und Endpunkt des Drahtstückes zusammenfallen. Die gesamte Arbeit der eingeprägten Kräfte wird in Joulesche Wärme verwandelt, wie es für den stationären Strom das Energieprinzip verlangt.

Übrigens ist das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}'$ durchweg wirbelfrei; es besitzt keinen Flächenwirbel an der Drahtoberfläche, d. h. seine tangentiellen Komponenten sind stetig. Auch $\mathfrak{H}$ ist in seinen tangentiellen Komponenten stetig, da von einer räumlichen Strömung die Rede ist. Folglich setzt sich die normale Komponente der Energieströmung stetig in das Drahtinnere hinein fort. Die tangentielle Komponente der Energieströmung aber kann einen Sprung machen. Im Drahtinnern geht der Energiestrom im wesentlichen in radialer Richtung vor sich. Im Dielektrikum hingegen, wo das von den freien Ladungen des Drahtes herrührende Feld $\mathfrak{E}'$ nahezu radial gerichtet ist, kommt ein dem Drahte paralleler Energiestrom hinzu, der weitaus den vorhin betrachteten, zur Drahtoberfläche normalen Energiestrom überwiegt. Dieser Hauptstrom der Energie geht längs des Drahtes im Dielektrikum vor sich. Auf diesem Wege wird die Energie z. B. von der Kraftstation eines Elektrizitätswerkes aus den Abnehmern zugeführt. In einer geschlossenen Leitung indessen macht sich dieser Energiestrom längs des Drahtes nicht bemerkbar, wenigstens nicht bei stationärem Strome, wo er in geschlossenen Bahnen verläuft.

Der tangentielle Energiestrom kommt zur Geltung bei nichtstationärem Strome, etwa bei den Schwingungen eines Flaschenkreises (vgl. § 66). Hier kann die von dem Kondensator herrührende elektromotorische Kraft die eingeprägte Kraft der obigen Betrachtung ersetzen. Nimmt nun die elektrische Energie des Kondensators gerade ab, so tritt ein radialer Energiestrom vom Kondensator aus in das Feld; derselbe wird sodann längs des Drahtes hingeführt nach denjenigen Stellen des Feldes, in denen die magnetische Energie gerade zunimmt. Ein Bruchteil strömt unterwegs in den Draht, um dort in Joulesche Wärme verwandelt zu werden. Diese Darstellung der Energieübertragung, welche der Poyntingschen Auffassung entspricht, ist demnach eine sinngemäße Ergänzung der Annahmen über die Energieverteilung, welche der Nahewirkungstheorie

eigentümlich sind. Bei elektrischen Schwingungen bewährt sie sich; sie stellt ferner die Kontinuität mit dem in der Optik so nützlichen Begriffe des Strahles her. Wir werden daher den Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S}$ auch wohl als „Strahlvektor" bezeichnen.

In diesem Werke ist unter $\mathfrak{E}$ der Vektor verstanden, dem die elektrische Stromdichte $\mathfrak{i}$ proportional ist (Gleichung 161). Für den Energiestrom ist, falls eingeprägte Kräfte wirken, nicht dieser Vektor, sondern $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'$ maßgebend. H. Hertz versteht dagegen unter $\mathfrak{E}$ den für den Energiestrom maßgebenden Vektor; er muß daher die Beziehung zwischen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{E}$ überall dort korrigieren, wo eingeprägte Kräfte auftreten. Auf diesen Unterschied der Bezeichnungen mag, der Vermeidung von Mißverständnissen wegen, hingewiesen werden.

Vierter Abschnitt.

Weiterer Ausbau der Theorie.

Erstes Kapitel.

Die ferromagnetischen Körper.

§ 79. Die magnetische Hysteresis.

Wir haben bereits im Eingange des vorigen Abschnittes (§ 54) auf die Sonderstellung hingewiesen, welche die ferromagnetischen Körper einnehmen. In ihnen ist die magnetische Permeabilität keine Materialkonstante, sondern sie ist ihrerseits von der Feldstärke abhängig. Die Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, welche eine wesentliche Voraussetzung der Feldgleichungen (179a, b) und des Ausdruckes (180b) der magnetischen Energie war, findet hier nicht mehr statt. Wir mußten daher im vorigen Abschnitte, bei der Entwickelung der aus jenen Feldgleichungen zu ziehenden Folgerungen, öfters die ferromagnetischen Körper ausschließen und ihre Behandlung diesem letzten Abschnitte vorbehalten.

Man könnte nun daran denken, die ferromagnetischen Körper in der Weise in die Maxwellsche Theorie einzuordnen, daß man an den Hauptgleichungen des § 59 festhielte, aber an Stelle der einfachen Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ eine kompliziertere Funktionsbeziehung setzte. An den Hauptgleichungen (177a, 178, 178a) werden wir allerdings festhalten müssen. Wir werden aber nicht annehmen dürfen, daß in ferromagnetischen Körpern noch der jeweilige Wert von $\mathfrak{B}$ überhaupt durch den jeweiligen Wert von $\mathfrak{H}$ be-

stimmt ist. Daß dem nicht so ist, zeigen die Vorgänge der magnetischen Hysteresis.

Bringt man ein Eisenstück in ein magnetisches Feld und läßt die Feldstärke allmählich wachsen, so wächst auch die magnetische Induktion und zwar stärker, als es der einfachen Proportionalität entsprechen würde. Man kann das Anwachsen der Induktion mit der Feldstärke durch eine Kurve veranschaulichen, indem man den Betrag von $\mathfrak{H}$ als Abszisse, den Betrag von $\mathfrak{B}$ als Ordinate aufträgt. Läßt man aber jetzt die Feldstärke wiederum abnehmen, so wird keineswegs dieselbe Kurve in entgegengesetztem Sinne beschrieben, sondern die Induktion nimmt nach einer anderen Kurve ab; es entspricht einer und derselben Feldstärke jetzt eine andere, und zwar eine größere Induktion. Es gibt demnach gar keine allgemeingültige Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, der Wert von $\mathfrak{B}$ hängt nicht nur von dem momentanen Felde, sondern auch von der Vorgeschichte des Eisenstückes ab. Die Magnetisierung folgt nicht momentan der Feldstärke, sondern es bleibt gewissermaßen ein Teil der früheren Magnetisierung zurück; diese Erscheinung bezeichnet man als magnetische Hysteresis. Läßt man nun die Feldstärke $\mathfrak{H}$ periodisch zu- und abnehmen, so wird die Veränderung von $\mathfrak{B}$ durch eine geschlossene Kurve, die sogenannte Hysteresisschleife, dargestellt. Dabei findet eine Wärmeentwickelung in dem Eisen statt.

Eine solche Wärmeentwickelung hatten wir bisher bei der Behandlung der Energievorgänge im magnetischen Felde nicht berücksichtigt. Wir erkannten indessen bereits im § 56, daß auch hinsichtlich des Energieausdruckes die ferromagnetischen Körper Anomalien aufweisen. Wir müssen jetzt die Behandlung der Energievorgänge von neuem aufnehmen.

Wir denken uns das Eisenstück in einem Raume befindlich, der durch eine geschlossene Fläche f begrenzt ist. Außerhalb dieser Fläche mögen sich ferromagnetische Körper nicht befinden; es mögen hier die Entwickelungen des vorigen Abschnittes ohne Einschränkung gelten. Dieselben ergeben, daß pro Sekunde in das Innere der geschlossenen Fläche f

eine Energiemenge tritt, die sich aus dem Poyntingschen Energiestrome (§ 77) berechnet. Schließen wir der Einfachheit wegen eingeprägte elektrische Kräfte aus, so ist nach (226a)

$$-\int \mathfrak{S}_\nu df = -\frac{c}{4\pi}\int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\nu df \tag{227}$$

der gesamte, in der Zeiteinheit in das Innere von f tretende Energiestrom (ν ist hier diejenige Normale, die nach dem Äußeren des Raumes weist, in welchem das Eisenstück sich befindet). Wir wollen annehmen, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Inneren dieses Raumes stetig verteilt sind, dann geht nach (102a) der Ausdruck (227) über in

$$\frac{c}{4\pi}\int dv\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\}.$$

Das ist die Energie, die pro Sekunde dem Raume v zugeführt wird und die daher gleich sein muß der Summe aus der Zunahme der elektromagnetischen Energie

$$W = U + T$$

und der im Eisenstücke stattfindenden Wärmeentwickelung; diese letztere setzt sich zusammen aus der Jouleschen Wärme Q und der infolge der magnetischen Hysteresis stattfindenden Wärmeentwickelung, die wir mit Q_m bezeichnen wollen; wir erhalten daher

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + Q + Q_m = \frac{c}{4\pi}\int dv\{\mathfrak{E}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\}. \tag{228}$$

Neben diesem allgemeinen Postulate der Maxwellschen Theorie legen wir die Hauptgleichungen (177a), (178) und (178a) der Behandlung der ferromagnetischen Körper zugrunde. Führt man nun

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{i} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \tag{228a}$$

und

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \tag{228b}$$

in (228) ein, so erhält man

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} + Q + Q_m = \int dv\left\{\mathfrak{E}\mathfrak{i} + \mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\cdot\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right\}. \tag{228c}$$

Nun verhalten sich aber die ferromagnetischen Körper in elektrischer Hinsicht normal; es ist also

$$Q = \int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{i})$$

die Joulesche Wärme, und

$$\frac{dU}{dt} = \int dv\left(\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\int dv \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi} = \frac{d}{dt}\int dv \cdot \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$$

die Zunahme der elektrischen Energie im Raume v.

Für die Summe aus der Zunahme der magnetischen Energie und aus der magnetischen Wärmeentwickelung ergibt sich

$$\frac{dT}{dt} + Q_m = \frac{1}{4\pi}\int dv\left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right). \tag{229}$$

Wir wenden diesen Ausdruck zuerst auf einen magnetischen Kreisprozeß an, von der Periode τ. Die Werte der Feldstärke $\mathfrak{H}$, der Induktion $\mathfrak{B}$ und der magnetischen Energie T, die zur Zeit t bestanden, kehren zur Zeit $t + \tau$ wieder, nachdem die Hysteresisschleife durchlaufen ist. Die Integration über eine Periode ergibt daher

$$\int_t^{t+\tau} dt \cdot Q_m = \frac{1}{4\pi}\int dv \cdot \int_t^{t+\tau} dt\left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right). \tag{229a}$$

Für die pro Volumeneinheit stattfindende Wärmeentwickelung in einer Periode erhalten wir

$$\frac{1}{4\pi}\int_t^{t+\tau} dt\left(\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}, \tag{229b}$$

wobei das Integral der rechten Seite über den durch die Hysteresisschleife angegebenen Weg zu erstrecken ist. Es gibt, wie zuerst E. Warburg gezeigt hat, in der Tat die Wärmeentwickelung an, welche bei dem magnetischen Kreisprozeß stattfindet; dieselbe ist gleich dem durch 4π dividierten

Flächeninhalte der Hysteresisschleife. Führen wir wieder den durch (173) definierten Vektor $\mathfrak{M}$ der Magnetisierung ein, so wird

$$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{H} + 4\pi d\mathfrak{M},$$

und da das über die geschlossene Kurve erstreckte Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H} = \frac{1}{8\pi}\int d\mathfrak{H}^2$$

verschwindet, so ist

$$\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{M} \tag{229c}$$

ein mit (229b) gleichwertiger Ausdruck der Wärmeentwickelung bei dem magnetischen Kreisprozeß.

Bei der Integration über den Kreisprozeß fiel aus (229) die magnetische Energie heraus; wir können aus den obigen Betrachtungen einen allgemeingültigen Ausdruck für die magnetische Energie eines Eisenstückes nicht gewinnen. Wir können indessen aus (229) die Energieänderungen im Felde ferromagnetischer Körper berechnen, wenn wir uns auf solche Vorgänge beschränken, die ohne magnetische Wärmeentwickelung verlaufen. Zu diesen Vorgängen gehören die Wechselwirkungen permanenter Magnete. Die „magnetische Remanenz“ oder „magnetische Härte“ kann als ein Grenzfall der Hysteresis aufgefaßt werden, insofern, als die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ überhaupt als von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ unabhängig und dem Stahlstücke anhaftend betrachtet wird. Dieser Grenzfall ist natürlich in Wirklichkeit nur angenähert realisiert, er spielt indessen in der Fernwirkungstheorie eine große Rolle, und es ist daher notwendig, nachzuweisen, daß auch vom Standpunkte der Nahewirkungsvorstellung die Theorie der magnetischen Härte sich widerspruchsfrei entwickeln läßt. Ist $\mathfrak{M}$ konstant, so wird

$$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{H},$$

und daher das betreffende Stück der Kurve, welche $\mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ darstellt, eine Gerade, die sowohl bei wachsendem und abnehmendem $\mathfrak{H}$ durchlaufen wird. Daraus

folgt, daß man es in der Tat mit reversibeln, von Wärmeentwickelung freien Vorgängen zu tun hat und daß nach (229)

(229d) $$\frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$$

die auf die Volumeinheit des magnetisch harten Körpers berechnete Energieänderung ist.

§ 80. Der remanente Magnetismus.

Wir betrachten das magnetische Feld eines Systemes ruhender, permanenter Magnete. Ein elektrisches Feld und ein elektrischer Strom sollen nicht vorhanden sein, es ist daher, der ersten Hauptgleichung (177a) zufolge,

(230) $$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist auch im Felde permanenter Magnete wirbelfrei; sie leitet sich aus einem skalaren Potentiale φ_m ab:

(230a) $$\mathfrak{H} = -\nabla \varphi_m.$$

Wir halten ferner an der Grundannahme fest, daß die magnetische Induktion durchweg quellenfrei verteilt ist, d. h. daß wahrer Magnetismus nicht existiert. Wir legen demnach auch der Theorie des remanenten Magnetismus die Bedingung zugrunde

(231) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Die Gleichungen (230) und (231), welche behaupten, daß $\mathfrak{H}$ wirbelfrei, $\mathfrak{B}$ aber quellenfrei verteilt ist, haben wir bereits im vorigen Abschnitte der Theorie der magnetischen Felder in stromlosen Bereichen zugrunde gelegt (vgl. § 57). Wir können auch jetzt, wo magnetisch harte Körper im Felde sich befinden, eine entsprechende Darstellung des Feldes geben.

Wir berechnen das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ aus seinen Quellen, indem wir

(232) $$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi \varrho_m'$$

setzen und unter ϱ'_m die „Dichte des freien Magnetismus“ verstehen. Da nach (173)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} \tag{232a}$$

ist, und da die Divergenz von $\mathfrak{B}$ durchweg Null ist, so wird

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{div}\mathfrak{M}. \tag{232b}$$

Ist die remanente Magnetisierung eines Stahlstückes bekannt, so ist auch die Verteilung des freien Magnetismus durch

$$\varrho'_m = -\operatorname{div}\mathfrak{M} \tag{232c}$$

gegeben (vgl. auch 173b). In einem magnetisch harten Körper haftet also der freie Magnetismus an den Volumelementen. Von einer flächenhaften Verteilung des freien Magnetismus wollen wir hier absehen, indem wir uns $\mathfrak{H}$ als stetig verteilt denken.

Aus der gegebenen Verteilung des freien Magnetismus in den permanenten Magneten berechnet sich das skalare Potential

$$\varphi_m = \int \frac{dv\,\varrho'_m}{r}. \tag{232d}$$

Dadurch ist dann das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ außerhalb und innerhalb der Magnete bestimmt, falls diese in den leeren Raum eingebettet sind. Sind außerdem magnetisch weiche Körper im Felde, so ist auch der in ihrem Innern und an ihrer Oberfläche befindliche freie Magnetismus in Rechnung zu ziehen; dieser ist indessen nicht konstant, sondern er ändert sich mit der Lage der permanenten Magnete. Um eine solche Komplikation zu vermeiden, wollen wir weiterhin annehmen, daß die Magnete in den leeren Raum eingebettet sind. Außerhalb der Magnete stimmt dann $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ überein; innerhalb der Magnete ist $\mathfrak{B}$ nach (232a) zu berechnen, aus $\mathfrak{H}$ und der gegebenen remanenten Magnetisierung $\mathfrak{M}$.

Wir wiesen bereits im § 56 darauf hin, daß das magnetische Feld, das von para- und diamagnetischen Körpern erregt wird, überhaupt keine selbständige Existenz besitzt. In einem durchweg stromlosen Raume, der nur von solchen Körpern

erfüllt ist, kann ein magnetisches Feld nicht dauernd bestehen. Es müssen irgendwo im Raume elektrische Ströme oder permanente Magnete sich befinden; andernfalls ist ein konstantes magnetisches Feld nicht möglich. Die para- und diamagnetischen Körper modifizieren nur das primär, etwa von elektrischen Strömen erregte Feld. Wir sahen, daß dieses Verhalten eng mit dem Energieausdruck (162) zusammenhing, und schlossen, daß für Körper, die remanenter Magnetisierung fähig sind, d. h. die selbständig, ohne Mitwirkung elektrischer Ströme, ein magnetisches Feld zu erzeugen vermögen, jener Energieausdruck aufzugeben ist. Ein allgemeingültiger Ausdruck für die Energie ferromagnetischer Körper ist uns auch jetzt nicht bekannt. Wohl aber sind wir am Ende des vorigen Paragraphen zu einem Ausdrucke für die Änderung der Energiedichte im Innern eines magnetisch harten Körpers gelangt. Diese Änderung war nach Gleichung (229d)

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}$$

oder, da $\mathfrak{M}$ konstant ist, nach (232a) gleich

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H} = \frac{1}{8\pi} \cdot d\mathfrak{H}^2.$$

Außerhalb der Magnete, wo $\mu = 1$ ist, stellt dieser Ausdruck ebenfalls die Änderung der magnetischen Energiedichte dar.

Verstehen wir unter T_0 die Energie des ganzen Feldes in einer bestimmten Anfangslage der permanenten Magnete, wo das Feld $\mathfrak{H}_0$ herrscht, so bestimmt

$$T - T_0 = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{H}^2 - \int \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}_0^2 \tag{233}$$

die Feldenergie T bei einer beliebigen Konfiguration der Magnete.

Denken wir uns nun die Magnete so langsam gegeneinander bewegt, daß die durch die Feldänderungen entstehenden elektrischen Kräfte und die dabei erregte elektrische Energie und Joulesche Wärme zu vernachlässigen sind, so ist die

Abnahme der Feldenergie gleich der Arbeit, welche die ponderomotorischen Kräfte bei der Bewegung leisten. Es spielt demnach für die Wechselwirkungen permanenter Magnete die Feldenergie T die Rolle einer potentiellen Energie. Da aber T nur durch eine additive Konstante von

$$U_m = \int \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 \tag{233a}$$

verschieden ist, so lassen sich die Kräfte, welche permanente Magnete aufeinander ausüben, ableiten, indem man U_m als potentielle Energie des Feldes einführt. Die potentielle Energie erscheint dabei als verteilt über die Volumelemente des Feldes, sowohl über diejenigen, die außerhalb, als auch über die, welche innerhalb der Magnete sich befinden. Der erhaltene Energieausdruck entspricht demnach den Grundvorstellungen der Nahewirkungstheorie.

Es ist aber leicht, U_m auf eine Form zu bringen, welche den Vorstellungen der Fernwirkungstheorie über die Energieverteilung entspricht. Nach (230a) wird

$$U_m = -\int \frac{dv}{8\pi} (\mathfrak{H} \nabla \varphi_m),$$

was auf Grund der Formel (73) übergeht in

$$U_m = \int \frac{dv}{8\pi} \varphi_m \operatorname{div} \mathfrak{H} - \int \frac{df}{8\pi} \varphi_m \cdot \mathfrak{H}_\nu.$$

Das über die Begrenzungsfläche f erstreckte Integral verschwindet, wenn die Fläche ins Unendliche rückt. Führt man endlich die durch (232) definierte Dichte ϱ'_m des freien Magnetismus ein, so wird

$$U_m = \frac{1}{2} \cdot \int dv \, \varphi_m \cdot \varrho'_m. \tag{233b}$$

Hier erscheint nun die Energie als verteilt über die Volumelemente der Magnete, in denen der freie Magnetismus seinen Sitz hat. Berechnen wir endlich das skalare Potential φ_m aus (232d), so wird

$$U_m = \iint \frac{dv_1 \, dv_2 \, \varrho'_{m1} \varrho'_{m2}}{r_{12}}. \tag{233c}$$

Das Integral ist über alle Kombinationen je zweier Volumelemente der Magnete zu nehmen, wobei jede Kombination nur einmal in Rechnung zu setzen ist. Dieser Ausdruck führt nun unmittelbar zum Coulombschen Gesetze. Denn die Arbeit, welche die Kräfte des Feldes bei der Verschiebung zweier Magnete gegeneinander leisten, bestimmt sich aus der Abnahme der potentiellen Energie U_m bei der Verschiebung. Die gleiche Arbeit wird erhalten, wenn man für die Wechselwirkung je zweier Volumelemente der beiden Magnete die abstoßende Kraft

$$\frac{dv_1 \varrho'_{m1} \cdot dv_2 \varrho'_{m2}}{r_{12}^2}$$

in Ansatz bringt, dem Coulombschen Gesetze der Fernwirkungstheorie entsprechend. Aus der Äquivalenz der Arbeiten bei einer beliebigen Verrückung folgt aber auf Grund des Prinzips der virtuellen Arbeit (§ 10) sofort die Äquivalenz der Kräfte.

Die Kräfte, welche permanente Magnete aufeinander ausüben, bestimmen sich also durch das Coulombsche Gesetz. An den Quellpunkten des Feldes $\mathfrak{H}$, d. h. an den Punkten, in denen freier Magnetismus sich befindet, greifen die ponderomotorischen Kräfte an. Die Massen, an denen die Kräfte angreifen, sind überall identisch mit denen, die das Kraftfeld erzeugen. Damit sind wir nunmehr völlig bei der Darstellungsweise der Fernwirkungstheorie angelangt.

Wenn nun auch diese Darstellung mathematisch zulässig ist, so ist sie wenig geeignet, in die Natur der Magnetisierung eine Einsicht zu gewähren. Haben wir doch den freien Magnetismus nur als Rechnungsgröße, nicht als Substanz angesehen. Nun können wir die gegebene Darstellung etwas abändern. Wir können uns die Magnete entfernt denken und das Feld $\mathfrak{H}$ jetzt im leeren Raume konstruieren. Im leeren Raume ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch und der freie Magnetismus geht in den wahren Magnetismus über. Es würde demnach das Feld $\mathfrak{H}$ auf den im leeren Raume verteilt gedachten wahren Magnetismus Kräfte ausüben, die ganz den Kräften entsprechen würden, mit denen das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ auf die wahre

Elektrizität wirkt. Die Zusammensetzung dieser Kräfte führt wiederum zu den Kräften und Drehkräften, die an dem betreffenden permanenten Magneten wirklich angreifen.

In die Maxwellsche Theorie paßt indessen auch diese Darstellung nicht. Denn diese Theorie schließt im Gegensatze zur Fernwirkungstheorie wahren Magnetismus überhaupt aus; jenes fingierte Feld im leeren Raume, durch das wir das wirkliche Feld abbildeten, ist nach der konsequent durchgeführten Maxwellschen Theorie überhaupt undenkbar. Hier besteht ein wesentlicher Gegensatz zwischen den Anschauungen der Nahewirkung und denen der Fernwirkung. Dieser Gegensatz wurde von Maxwell und Hertz nicht so scharf hervorgehoben, die auf magnetischem Gebiete noch vielfach mit den älteren Anschauungen operierten; erst die weitere Fortbildung der Maxwellschen Theorie ließ jenen Gegensatz deutlich hervortreten. Wir wollen der in diesem Paragraphen entwickelten Darstellung des Feldes permanenter Magnete jetzt eine zweite an die Seite stellen, welche der quellenfreien Natur der magnetischen Induktion von vornherein gerecht wird.

§ 81. Äquivalenz von Magneten und elektrischen Strömen.

Wir knüpfen an die Entwickelungen des § 58 an. Wir lernten dort eine Darstellung des magnetischen Feldes kennen, welche nicht sowohl das wirbelfreie Feld $\mathfrak{H}$ durch seine Quellen, als vielmehr das quellenfreie Feld $\mathfrak{B}$ durch seine Wirbel bestimmt. Wir führten eine dem Wirbel von $\mathfrak{B}$ proportionale Größe $\mathfrak{i}'$ ein, die räumliche Dichte des „freien elektrischen Stromes", die durch die Gleichung (175) definiert war:

$$\text{curl}\,\mathfrak{B} = \frac{4\pi\mathfrak{i}'}{c}. \tag{234}$$

Sind die Wirbel von $\mathfrak{B}$ flächenhaft verteilt, so tritt noch ein freier flächenhafter Strom $\mathfrak{j}'$ hinzu (vgl. 175a). Doch wollen wir es vorziehen, die Wirbel zunächst als räumlich verteilt anzusehen, auch an der Begrenzung der Magnete; wir

behalten uns vor, später den Grenzübergang vom räumlichen zum Flächenwirbel zu machen.

Setzt man nun für das Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}'}{r} \tag{234a}$$

und leitet aus ihm die magnetische Induktion ab, vermöge

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}, \tag{234b}$$

so wird der Bedingung des Verschwindens der Divergenz von $\mathfrak{B}$ (Gleichung 231) überall Genüge geleistet.

Es handelt sich nur noch darum, den Vektor $\mathfrak{i}'$ zu ermitteln. Da ein wahrer Strom im Felde nicht vorhanden ist, so ist $\mathfrak{H}$ wirbelfrei (Gleichung 230). Es folgt daher aus (232a) und (234)

$$\frac{\mathfrak{i}'}{c} = \operatorname{curl}\mathfrak{M}. \tag{234c}$$

Die Dichte des freien Stromes ist dem Wirbel der Magnetisierung proportional. Da die Magnetisierung eines magnetisch harten Körpers unveränderlich ist, so haftet der freie Strom an den Volumelementen der permanenten Magnete. Werden die Magnete gegeneinander bewegt, so ändert sich die Verteilung und die Intensität der freien Ströme in ihrem Innern nicht.

Durch (234a, b, c) ist nunmehr das Feld des Vektors $\mathfrak{B}$ sowohl außerhalb wie innerhalb der Magnete bestimmt. Das Feld $\mathfrak{H}$ ist außerhalb der Magnete, im leeren Raume, mit dem Felde $\mathfrak{B}$ identisch; im Innern der Magnete hingegen ist $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{B}$ und der gegebenen Magnetisierung $\mathfrak{M}$ auf Grund von (232a) zu berechnen.

Die Darstellung des Feldes remanenter Magnete als Wirbelfeld ist zuerst von Ampère befürwortet worden. Ampère knüpfte dabei an die Äquivalenz eines Kreisstromes und einer magnetischen Schale an. Wir wollen nicht versäumen, diese Äquivalenz aus der soeben gegebenen allgemeinen Darstellung abzuleiten.

Wir denken uns zu diesem Zwecke einen Zylinder aus magnetisch hartem Material, dessen Begrenzungsebenen einen

gegen ihre eigenen Abmessungen sehr kleinen Abstand h besitzen, und dessen Erzeugenden senkrecht zu diesen Ebenen stehen. Der Zylinder soll, parallel den erzeugenden Geraden, homogen magnetisiert sein. Dieses Gebilde, insbesondere den Grenzfall verschwindend kleiner Höhe h des Zylinders, bezeichnet man als magnetische Schale.

Es sind nun die Wirbel von $\mathfrak{M}$ zu bestimmen; der räumliche Wirbel ist durchweg Null, da innerhalb der Schale $\mathfrak{M}$ konstant ist und außerhalb $\mathfrak{M}$ gleichfalls konstant, nämlich Null ist. Auf den zueinander parallelen Begrenzungsebenen des Zylinders befindet sich kein Flächenwirbel, da $\mathfrak{M}$ hier senkrecht gerichtet ist. Eine Unstetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{M}$ liegt nur an der Mantelfläche des Zylinders vor. Die Dichte des hier befindlichen Flächenwirbels ist gleich dem konstanten Betrage von $\mathfrak{M}$ innerhalb des Zylinders; der Umlaufssinn ist durch die Richtung von $\mathfrak{M}$ im Zylinder bestimmt. Wir verstehen unter $d\mathfrak{s}$ die Elemente der Mittellinie der Mantelfläche des Zylinders; der Durchlaufungssinn soll dem Umkreisungssinne der Wirbel durch eine Rechtsschraube zugeordnet sein. Der freie Strom ist dann parallel $d\mathfrak{s}$; seine Flächendichte ist gemäß (234c) gleich der Dichte des Flächenwirbels von $\mathfrak{M}$, multipliziert mit der universellen Konstanten c. Senkrecht zu einer jeden der Zylindererzeugenden fließt also im ganzen der freie Strom

$$J' = c \cdot |\mathfrak{M}| \cdot h. \tag{235}$$

Geht man nun zum Grenzfalle eines verschwindend kleinen h über, indem man gleichzeitig die Magnetisierung $|\mathfrak{M}|$ wachsen läßt, so wird der flächenhaft verteilte Strom zur Stromlinie. Das Vektorpotential der magnetischen Schale wird dann

$$\mathfrak{A} = \frac{J'}{c} \cdot \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{235a}$$

Es stimmt durchweg überein mit dem Vektorpotential, welches ein Strom von der gleichen Stromstärke, der längs der Randkurve der magnetischen Schale fließt, im leeren Raume erzeugen würde (vgl. 168a).

Wir haben uns bisher auf eine ebene Schale beschränkt. Wir können aber ohne Schwierigkeit das Ergebnis auf eine Schale von gekrümmter Mittelfläche ausdehnen, deren Krümmungsradius groß gegen die Schalendicke ist. Wir zerlegen die Schale in Flächenstücke, die als eben zu betrachten sind, und wenden auf jedes dieser Flächenstücke die obige Betrachtung an. Längs der Umfangslinie eines solchen Flächenstückes ist dann der freie Strom J' anzunehmen, der durch (235) angegeben ist. Ist nun das Produkt aus der Magnetisierung $|\mathfrak{M}|$ der Volumelemente und der Schalendicke h längs der Schale konstant, so hat J' für alle Umfangslinien den gleichen Wert. In dem Ausdrucke (235a) des Vektorpotentiales heben sich alsdann die Beiträge derjenigen Kurvenstücke, welche zwei Flächenstücke begrenzen, und die daher zweimal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sind, heraus, und es bleibt nur das Integral längs der Randkurve der ganzen Schale übrig. Das Vektorpotential ist auch jetzt dasjenige eines die Umfangslinie der Schale umkreisenden Stromes. Durch das Vektorpotential ist aber das Feld $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt. Es stimmt also im ganzen Raume das Feld des Vektors $\mathfrak{H}$ und daher außerhalb der Schale auch das Feld des Vektors $\mathfrak{H}$, das von der magnetischen Schale erregt wird, überein mit dem Felde eines längs der Randkurve fließenden Stromes.

Stellen wir anderseits das Feld $\mathfrak{H}$ in der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise durch seine Quellen dar, so ergibt es sich als herrührend von einer magnetischen Doppelschicht vom Momente $|\mathfrak{M}|h$ pro Flächeneinheit. Das Feld $\mathfrak{H}$ der Doppelschicht wird im Innern der Schale gleichzeitig mit der Magnetisierung $\mathfrak{M}$, die entgegengesetzt zu $\mathfrak{H}$ weist, beim Grenzübergang zu verschwindend kleinem h unendlich, wenn anders das Produkt $|\mathfrak{M}| \cdot h$ endlich bleiben soll. Außerhalb der Schale aber stimmt das Feld $\mathfrak{H}$ überein mit dem Felde einer die Schale umrandenden Stromlinie von der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke

$$\frac{J'}{c} = |\mathfrak{M}| \cdot h.$$

Damit sind wir zu der bereits in § 29 dargelegten Äquivalenz von Wirbelfaden und Doppelschicht zurückgelangt.

Das Stromsystem, das wir im Innern der magnetisch harten Körper angenommen haben, ist selbstverständlich kein wirkliches Stromsystem. Wahren Leitungsstrom haben wir vielmehr ausgeschlossen, indem wir curl $\mathfrak{H}$ gleich Null gesetzt haben. Demgemäß gibt das fingierte Stromsystem zu keiner Jouleschen Wärmeentwickelung Veranlassung, ein Durchschneiden der Stromfäden zu keiner Elektrizitätsanhäufung. Jenes System „freier elektrischer Ströme" ist nichts als das Wirbelfeld des quellenfreien Vektors $\mathfrak{B}$; es dient zunächst nur zur mathematischen Darstellung dieses Feldes.

Wir können nun aber wiederum die gegebene Darstellung in ähnlicher Weise abändern, wie im vorigen Paragraphen. Wir können uns die Magnete entfernt und das Feld $\mathfrak{B}$ jetzt im leeren Raume konstruiert denken. Im leeren Raume ist $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch, wir können hier den Wirbel von $\mathfrak{B}$ als wirklichen Strom deuten. Durch diese Deutung wird die Weiterbildung der Theorie des Magnetismus angebahnt, indem eine Erklärung durch Annahme verborgener Elektrizitätsbewegungen nahegelegt wird. Man hat diese Erklärung zu verschiedenen Zeiten in verschiedener Weise zu geben versucht, früher durch Ampèresche Molekularströme, neuerdings durch rotierende Elektronen. Diese molekulartheoretischen oder elektronentheoretischen Theorien haben zu zeigen, daß durch Mittelwertsbildung über die Felder der im Raume angenommenen Stromsysteme wirklich das Feld $\mathfrak{B}$ entsteht. Sie haben ferner von dem Zusammenhange des Vektors $\mathfrak{H}$ mit dem beobachtbaren elektrischen Strome Rechenschaft zu geben. Ein Eingehen auf diese Theorien liegt indessen außerhalb des Rahmens dieses Bandes.

Die Ausführung des gegebenen Bildes, welche das Feld der Magnete im Äther konstruiert und die Wirbel von $\mathfrak{B}$ auf verborgene Elektrizitätsbewegungen zurückführt, erklärt die quellenfreie Natur von $\mathfrak{B}$ ohne weiteres. Sie verdient daher den Vorzug vor der entsprechenden Ausführung des im vorigen

Paragraphen gegebenen Bildes, welche im Äther Quellen von $\mathfrak{B}$ annehmen mußte. Die konsequent durchgeführte Maxwellsche Theorie, welche wahren Magnetismus überhaupt ausschließt, muß jedenfalls dieses zweite Bild für naturgetreuer halten, als jenes erste. Es entsteht nun die Aufgabe, zu zeigen, daß dieses zweite Bild die ponderomotorischen Kräfte zwischen permanenten Magneten richtig wiedergibt.

Wir gehen auf den Ausdruck (229d) für die Änderung der magnetischen Energiedichte im Innern der remanent magnetisierten Körper zurück; außerhalb der Magnete im leeren Raume, wo $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch ist, gilt der gleiche Ausdruck, so daß

$$dT = \frac{1}{4\pi} \cdot \int dv \mathfrak{H} d\mathfrak{B} \tag{236}$$

die Energieänderung des ganzen Feldes angibt. Nun ist

$$\mathfrak{H} d\mathfrak{B} = d(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B} d\mathfrak{H},$$

daher die Energieänderung bei einer Verschiebung der starren Magnete gegeneinander

$$dT = \frac{1}{4\pi} d \int dv (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{B} d\mathfrak{H}. \tag{236a}$$

Nun war aber bereits im ersten Abschnitte der Satz bewiesen worden (§ 28): das über den ganzen Raum erstreckte Integral des inneren Produktes aus einem quellenfreien und einem wirbelfreien Vektor ist Null. Dieser Satz ist hier anzuwenden, da $\mathfrak{H}$ durchweg wirbelfrei, $\mathfrak{B}$ aber durchweg quellenfrei ist. Er ergibt

$$\int dv (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) = 0,$$

und daher

$$dT = -\frac{1}{4\pi} \int dv \mathfrak{B} d\mathfrak{H}. \tag{236b}$$

Ferner ist im Innern der remanent magnetisierten Körper nach (232a)

$$d\mathfrak{H} = d\mathfrak{B};$$

dasselbe gilt im umgebenden Raume. Wir können daher für die Energieänderung schreiben

$$dT = -d\int \frac{dv}{8\pi} \cdot \mathfrak{B}^2. \tag{236c}$$

Verstehen wir nun unter T_0 die Energie bei einer bestimmten Anfangslage der Magnete, wo die magnetische Induktion $\mathfrak{B}_0$ sein mag, so bestimmt

$$T - T_0 = -\int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}_0^2 \tag{237}$$

die Feldenergie bei einer beliebigen Konfiguration der Magnete. Dieser Energieausdruck tritt dem Ausdrucke (233) des vorigen Paragraphen gleichwertig gegenüber. Wie jener dem ersten Bilde entsprach, so entspricht dieser dem zweiten Bilde.

Wir setzen

$$T_m = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{B}^2. \tag{237a}$$

Dieses ist die magnetische Energie des Feldes, das entsteht, wenn wir die freie Strömung $\mathfrak{i}'$ durch eine wahre Strömung im leeren Raume ersetzt denken. Die ponderomotorischen Kräfte, welche elektrische Ströme aufeinander ausüben, sind nun im § 64 allgemein aus einem elektrodynamischen Potentiale abgeleitet worden, welches der negativen magnetischen Energie gleich ist. Die elektrodynamischen Kräfte streben die Stromkreise so zu stellen, daß die magnetische Energie bei konstant gehaltenen Stromstärken möglichst groß wird. Denken wir uns nun die freie Strömung $\mathfrak{i}'$, die ja bei einer Bewegung der Magnete unveränderlich an ihren Volumenelementen haftet, durch eine wahre Strömung ersetzt, so haben wir die Arbeit der zwischen den Strömen wirksamen Kräfte der Zunahme von T_m bei konstant gehaltener Stromdichte gleich zu setzen. Die konsequente Verfolgung der in diesem Paragraphen gegebenen Darstellung führt also dazu, die Arbeit der zwischen den Magneten wirksamen Kräfte der

Zunahme von T_m gleich zu setzen. Die Zunahme der magnetischen Energie T_m (Gleichung 237a) des fingierten Feldes im leeren Raume ist jedoch gleich der Abnahme der wirklichen Energie, nach Gleichung (237). Wir gelangen also auch vom Standpunkte dieses zweiten Bildes aus, wie von dem des ersten Bildes dazu, aus der wirklichen Feldenergie der permanenten Magnete, wie aus einer potentiellen Energie, die zwischen ihnen wirkenden ponderomotorischen Kräfte abzuleiten. Ein Widerspruch zwischen den beiden Bildern besteht daher nicht.

Die Kräfte und Kräftepaare, welche zwischen zwei magnetischen Schalen wirken, sind den Kräften und Kräftepaaren gleich, welche die beiden äquivalenten linearen, längs der Randkurve fließenden Ströme aufeinander ausüben. Jede Schale sucht sich so zu stellen, daß möglichst viele der von der anderen Schale entsandten Kraftlinien sie in positivem Sinne durchsetzen; als positiv ist dabei diejenige Richtung bezeichnet, die sich der Richtung des fingierten Stromes durch die Ampèresche Regel zuordnet, das ist die Magnetisierungsrichtung der Schale. Das elektrodynamische Potential der beiden fingierten Ströme ist dem negativ genommenen Teile der magnetischen Energie gleich, der dem Produkte der beiden Stromstärken $J_1' J_2'$ proportional ist. Nach § 63, Gleichung (184a) und (183b) ist dieses Potential

$$-\frac{J_1' J_2'}{c^2} \cdot \iint \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} \tag{237b}$$

(vgl. auch 186e). Dieser Ausdruck spielt für die Wechselwirkung der beiden Schalen die Rolle der potentiellen Energie.

Für beliebige Verteilung der Magnetisierung hat man die Wechselwirkung der Magnete auf Grund des allgemeineren Energieausdruckes (184d) zu berechnen, d. h. aus einem Potentiale der Wechselwirkung

$$-T_m = -\frac{1}{c^2} \iint \frac{dv_1\, dv_2 \cdot \mathfrak{i}_1' \mathfrak{i}_2'}{r_{12}}, \tag{237c}$$

wobei die Integration über alle Kombinationen je zweier magnetisierter Volumelemente zu erstrecken ist und $\mathfrak{i}_1'$, $\mathfrak{i}_2'$ sich gemäß (234c) aus der Magnetisierung berechnen; man kann auch schreiben

$$(237\,\mathrm{d}) \qquad -T_m = -\int\int \frac{dv_1\,dv_2}{r_{12}} (\mathrm{curl}\,\mathfrak{M}_1,\ \mathrm{curl}\,\mathfrak{M}_2).$$

Dieser Ausdruck bildet das Gegenstück des Ausdruckes (233c) des ersten Bildes, der nach (232c) übergeht in

$$U_m = \int\int \frac{dv_1\,dv_2}{r_{12}} \cdot \mathrm{div}\,\mathfrak{M}_1 \cdot \mathrm{div}\,\mathfrak{M}_2.$$

Beide Ausdrücke sind der Fernwirkungsanschauung angepaßt; der Ausdruck für U_m zeigt Fernkräfte zwischen den Quellpunkten, der Ausdruck für T_m Fernkräfte zwischen den Wirbelelementen der remanenten Magnetisierung an. Beide Ausdrücke lassen erkennen, daß für die Wechselwirkungen zweier permanenter Magnete das Gesetz der Gleichheit von aktio und reaktio gilt. Denn es hängt die Arbeit der wechselseitigen Kräfte bei der Verrückung immer nur von der Änderung der relativen Lage der magnetisiertem Volumelemente ab. Verschieben sich zwei Magnete, ohne ihre relative Lage zu ändern, so ist die Summe der virtuellen Arbeiten Null. Es wirkt also im ganzen keine resultierende Kraft und kein Kräftepaar, d. h. die Kräfte und Kräftepaare, welche die beiden Magnete aufeinander ausüben, kompensieren sich und sind daher entgegengesetzt gleich.

§ 82. Die ponderomotorischen Kräfte zwischen permanenten Magneten und elektrischen Strömen.

Wir denken uns im Felde eine Anzahl permanenter Magnete und außerdem, räumlich von jenen getrennt, eine Anzahl elektrischer Ströme. Die Stromleiter sollen wie starre Körper beweglich sein. Außerhalb der Magnete soll die Permeabilität μ durchweg gleich 1 sein, so daß außer der remanenten Magnetisierung der magnetisch harten Körper eine

veränderliche Magnetisierung magnetisch weicher Körper nicht in Frage kommt. Die Wechselwirkungen der Magnete unter sich und der Ströme unter sich kennen wir jetzt. Welche Kräfte übt nun aber ein Strom auf einen Magneten, und ein Magnet auf einen Strom aus?

Was zunächst die Wirkung auf einen Magneten (M_2) anbelangt, so können wir den Strom (J_1) ersetzen durch den äquivalenten Magneten (M_1). Denn dieser erzeugt ja überall die gleiche magnetische Induktion $\mathfrak{B}$, wie der Strom; die Wirkung auf (M_2) ist aber durch $\mathfrak{B}$ bestimmt, indem jeder Stromfaden des fingierten Stromsystemes (J_2'), das (M_2) ersetzt, möglichst viele Induktionslinien zu umschlingen sucht. Die Potentialfunktion der Wirkung, die J_1 auf M_2 ausübt, wird erhalten, indem man in (237 c) an Stelle der Dichte i_1' des in (M_1) zu fingierenden Stromes die Dichte i_1 des in (J_1) wirklich fließenden setzt; sie ist

$$-\frac{1}{c^2}\int\int\frac{dv_1\,dv_2\,i_1\,i_2'}{r_{12}}.$$

Anderseits können wir bezüglich der Gegenwirkung auf den Strom (J_1) den Magneten (M_2) durch das äquivalente Stromsystem (J_2') ersetzen, welches überall dasselbe $\mathfrak{B}$ erzeugt. Denn durch das Feld $\mathfrak{B}$ sind die Kräfte bestimmt, die auf (J_1) wirken. Wir erhalten demnach das Potential der Wirkung, die M_2 auf J_1 ausübt, indem wir in dem Ausdrucke des elektrodynamischen Potentials zweier Stromsysteme J_1 und J_2 an Stelle von J_2 das System J_2' setzen, welches dem Magneten M_2 äquivalent ist. Dieses Potential ist

$$-\frac{1}{c^2}\cdot\int\int\frac{dv_1\,dv_2\,i_1\,i_2'}{r_{12}}.$$

Wir sehen also erstens: Auf einen Magneten übt ein Strom die gleichen Kräfte aus, wie der äquivalente Magnet. Zweitens: Auf einen Strom übt ein Magnet die gleichen Kräfte aus, wie der äquivalente Strom. Drittens endlich folgt aus der Identität der Potentialausdrücke für die Wirkung des Stromes auf den Magneten einerseits,

die Wirkung des Magneten auf den Strom anderseits: Die Kräfte und Drehkräfte, welche ein Strom und ein Magnet aufeinander ausüben, erfüllen das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung. Es kann daher ein aus einem Magnete und einem fest verbundenen Strome bestehendes System sich nicht selbst eine Beschleunigung erteilen.

Da nicht nur für die Wechselwirkung von Magneten untereinander und von Strömen untereinander das dritte Newtonsche Axiom gilt, sondern auch für die Wechselwirkung von Magneten und Strömen, so können wir schließen: von einem Magneten oder einem Strome werden auf einen Magneten die gleichen Kräfte ausgeübt, wie auf den äquivalenten Strom. In der Tat, es üben, wie bewiesen, Magnet (M_1) und äquivalenter Strom (J_1) auf einen Magneten (M_2) die gleichen Wirkungen aus. Diesen Wirkungen entgegengesetzt gleich sind die Gegenwirkungen, die auf den Magneten (M_1) bzw. den äquivalenten Strom (J_1) von dem Magneten (M_2) ausgeübt werden. Die Kräfte und Drehkräfte, die (M_2) auf (M_1) und auf den äquivalenten Strom (J_1) ausübt, sind daher untereinander gleich. Dasselbe gilt von den Kräften und Drehkräften, die ein Strom (J_2) auf (M_1) und den äquivalenten Strom (J_1) ausübt. Wir können also allgemein den Satz aufstellen: die Kräfte, die an einem Magneten und einem äquivalenten Strome in einem beliebigen magnetischen Felde im Äther angreifen, sind einander im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent. Wir sind demnach imstande, in jeder Hinsicht von den ponderomotorischen Kräften, welche remanente Magnete ausüben, und welche an ihnen angreifen, Rechenschaft zu geben, indem wir das System freier Strömungen, welches der remanenten Magnetisierung entspricht, durch wahre elektrische Ströme im Äther ersetzt denken.

§ 83. Eingeprägte magnetische Kräfte.

Wir dürfen uns nicht verhehlen, daß die Theorie des Ferromagnetismus noch große Schwierigkeiten bietet. Eine

vollkommene Theorie müßte die Funktionsbeziehung, welche zwischen $\mathfrak{B}$ und der Feldintensität $\mathfrak{H}$ bzw. der Vorgeschichte des Feldes besteht, allgemein angeben. Von einer solchen Theorie sind wir noch weit entfernt. Die Einführung des Vektors $\mathfrak{M}$, der in remanent magnetisierten Körpern konstant ist, ist nur eine provisorische. Obwohl die gegebene Darstellung von den wichtigsten Eigenschaften der magnetisch harten Körper Rechenschaft gibt, wird sie späterhin voraussichtlich einer allgemeineren Theorie des Ferromagnetismus Platz machen müssen.

In der ersten Auflage des vorliegenden Bandes ist auf die Unvollkommenheiten der Theorie der magnetischen Härte hingewiesen worden; heute bestehen dieselben noch in kaum vermindertem Maße.

Dort ist in Anlehnung an O. Heaviside eine etwas andere Darstellung der Theorie gegeben worden, welche eingeprägte magnetische Kräfte heranzieht. Schreiben wir die eingeprägte Kraft $\mathfrak{H}'$ und setzen, ähnlich wie in Gleichung (161)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}', \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H},$$

so können wir die Gleichungen

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{curl}\mathfrak{H}' = 0$$

allgemein erfüllen und dennoch die Permeabilität μ als Konstante betrachten. Hierbei würde es dann der weiteren Entwickelung der Theorie vorbehalten bleiben, über die Natur der eingeprägten Kraft $\mathfrak{H}'$ und ihre Verteilung Klarheit zu gewinnen.

Diese Darstellung ist indessen von der hier in der zweiten Auflage bevorzugten kaum verschieden. In der Tat, setzen wir $\mu = 1$, so wird

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}',$$

und es wird $\mathfrak{H}'$ mit der Feldstärke (von uns $\mathfrak{H}$ geschrieben) identisch, $\mathfrak{H}'$ aber mit $4\pi\mathfrak{M}$ (vgl. 232a). In magnetisch harten Körpern würde man demnach eine konstante eingeprägte Kraft anzunehmen haben. Wenn man statt dessen von einer kon-

stanten Magnetisierung redet, so ist diese Auffassung zwar dem Wortlaute, aber nicht der Sache nach von der Heavisideschen verschieden. Wir haben uns, indem wir die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ einführten, einer von der Mehrzahl der Physiker angewandten Ausdrucksweise angeschlossen.

Zweites Kapitel.

Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 84. Induktion durch Bewegung zweier Stromringe.

Im vorigen Abschnitte haben wir ausschließlich das elektromagnetische Feld in ruhenden Körpern behandelt. Eine Bewegung der Körper haben wir nicht in Betracht gezogen. Wir gehen nunmehr dazu über, die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern zu entwickeln, wenigstens so weit, als sie sich in die Maxwell-Hertzsche Theorie einordnen lassen.

Wir knüpfen zunächst an die im § 63 behandelte Aufgabe an, die Induktionswirkungen in einem aus zwei Stromringen bestehenden Systeme zu ermitteln. Wir fanden für den Induktionsfluß durch eine vom ersten Ringe umschlungene Fläche

$$\frac{1}{c^2} L_{11} J_1 + \frac{1}{c^2} L_{12} J_2,$$

und für den vom zweiten Ringe umschlungenen Induktionsfluß

$$\frac{1}{c^2} L_{12} J_1 + \frac{1}{c^2} L_{22} J_2.$$

Wir leiteten aus dem Faradayschen Induktionsgesetze die induzierten elektromotorischen Kräfte ab; dabei beschränkten wir die Betrachtung auf diejenigen elektromotorischen Kräfte, die in ruhenden starren Stromringen durch Änderungen der Stromstärken induziert werden. Änderungen der relativen Lage und der Form der Stromringe zogen wir nicht in Betracht.

Das Faradaysche Induktionsgesetz gilt nun aber auch für bewegte Stromkreise. Es setzt allgemein

die induzierte elektromotorische Kraft der zeitlichen Abnahme der Zahl der umschlungenen Induktionslinien proportional. Auf Grund dieses durch die Erfahrung bestätigten Gesetzes erhalten wir für die induzierten elektromotorischen Kräfte die Ausdrücke

$$(238) \qquad E_1^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2),$$

$$(238a) \qquad E_2^i = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2).$$

Es entstehen induzierte elektromotorische Kräfte nicht nur durch Änderungen der Stromstärken J_1, J_2, sondern auch durch Änderungen der Koeffizienten der gegenseitigen Induktion und der Selbstinduktion. Durch Bewegung starrer Stromleiter wird allerdings nur L_{12} geändert; hat man es aber etwa mit biegsamen stromführenden Bändern zu tun, so hat man auch die Veränderlichkeit der Selbstinduktionskoeffizienten zu beachten.

Nun muß in jedem der beiden Stromkreise die Summe der induzierten und der um das Produkt aus Stromstärke und Widerstand verminderten eingeprägten elektromotorischen Kraft gleich Null sein. Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$(238b) \qquad E_1^e = J_1R_1 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{11}J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_2),$$

$$(238c) \qquad E_2^e = J_2R_2 + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}J_1) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{22}J_2).$$

Das sind dieselben Gleichungen, die wir in § 64 durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen auf unser als Bizykel betrachtetes System gewonnen haben (Gleichungen 186d). Die dort entwickelte Auffassung, welche die Stromstärken als zyklische Geschwindigkeiten, die Induktionsflüsse als zyklische Momente deutet, ergibt auch für die Induktion durch Bewegung mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate. Natürlich gilt das nur für quasistationäre Strömung. Außerdem aber ist der Gültigkeitsbereich der Gleichungen auf hinreichend langsame Bewegung der Stromringe zu beschränken. Das geht aus dem

mechanischen Bilde hervor, welches die Lage und die Form der Stromringe durch gewisse Parameter bestimmt, und von diesen Parametern voraussetzt, daß sie sich langsam ändern (§ 64). Wir werden hier als langsam eine Bewegung zu bezeichnen haben, deren Geschwindigkeit klein gegen die Geschwindigkeit c ist, mit der die elektromagnetischen Störungen sich fortpflanzen.

Für solche langsame Bewegung ist nun die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte leicht anzugeben. Wir haben im § 64 gesehen, daß diese Kräfte für ruhende Leiter sich berechnen aus der Zunahme der magnetischen Energie, indem die negative magnetische Energie die Rolle des elektrodynamischen Potentiales spielt. Es ist aber wohl zu beachten, daß diejenige Zunahme der magnetischen Energie in Rechnung zu setzen ist, die stattfindet, wenn die Stromstärken konstant gehalten werden. Es ist die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte bei einer virtuellen Verrückung oder Formänderung der linearen Leiter

$$\delta A = \delta T = \frac{1}{2c^2} J_1^2 \delta L_{11} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} + \frac{1}{2c^2} \cdot J_2^2 \delta L_{22}.$$

Bei hinreichend langsamer Bewegung, d. h. solange die Geschwindigkeit der Bewegung nicht merklich das magnetische Feld und die Feldenergie beeinflußt, werden die elektrodynamischen Kräfte die gleichen sein, die in der jeweils eingenommenen Lage auf den ruhenden Leiter wirken würden. Die Arbeit, welche diese Kräfte bei einer solchen Bewegung leisten, wird dann

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2c^2} J_1^2 \frac{dL_{11}}{dt} + \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{1}{2c^2} J_2^2 \frac{dL_{22}}{dt}. \tag{238d}$$

Werden die Stromstärken wirklich konstant gehalten, so ist diese Arbeitsleistung der Zunahme der Feldenergie gleich. Ändern sich aber bei der wirklichen Bewegung die Stromstärken, so gilt für die Zunahme der durch (185) bestimmten Feldenergie der allgemeinere Ausdruck

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2} \Big\{ & J_1 L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{2} J_1^2 \frac{dL_{11}}{dt} + J_1 L_{12} \frac{dJ_2}{dt} + J_2 L_{12} \frac{dJ_1}{dt} \\ & + J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + J_2 L_{22} \frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{2} J_2^2 \frac{dL_{22}}{dt} \Big\}. \end{aligned} \right. \tag{238e}$$

Die Summe aus der pro Sekunde von den elektrodynamischen Kräften geleisteten Arbeit und aus der Zunahme der Energie ist

$$(238f)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\Big\{ J_1 \frac{d(L_{11} J_1)}{dt} + J_1 \frac{d(L_{12} J_2)}{dt} + J_2 \frac{d(L_{12} J_1)}{dt} \\ &\qquad + J_2 \frac{d(L_{22} J_2)}{dt} \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Nach (238, 238a) ist dieses

$$(239)\qquad \frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = - J_1 E_1' - J_2 E_2'.$$

Die Summe aus Arbeit der elektrodynamischen Kräfte und der Zunahme der Feldenergie ist gleich der negativen Arbeit der induzierten elektromotorischen Kräfte. Wir können statt der letzteren Kräfte die Differenzen der eingeprägten Kräfte und der Produkte aus Stromstärke und Widerstand setzen (vgl. 238b, c). Dann wird

$$(239a)\quad \frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_1 E_1^e + J_2 E_2^e - J_1^2 R_1 - J_1^2 R_2.$$

Die von den eingeprägten elektromotorischen Kräften chemischen oder thermischen Ursprungs geleistete Arbeit liefert, soweit sie nicht als Joulesche Wärme in dem Leiter verzehrt wird, diejenige Energie, welche erforderlich ist, um gleichzeitig die mechanische Arbeit (238d) zu leisten und die magnetische Energie um den Betrag (238e) zu vermehren. Damit ist der Nachweis geführt, daß das Energieprinzip von den angenommenen elektromotorischen und ponderomotorischen Kräften erfüllt ist. Das kann nicht wundernehmen, da ja diese Kräfte aus den Lagrangeschen Gleichungen sich ableiten ließen, und die Energiegleichung für alle diejenigen Systeme gilt, welche den Lagrangeschen Gleichungen genügen.

Wir denken uns beispielsweise zwei starre Stromkreise in parallelen Ebenen einander gegenübergestellt und in gleichem Sinne von Strömen durchflossen. Bei einer Annäherung der Stromringe leisten die anziehenden elektrodynamischen Kräfte Arbeit, und gleichzeitig nimmt die magnetische Feldenergie zu.

Die induzierten elektromotorischen Kräfte wirken in entgegengesetztem Sinne, wie die Ströme. Um die Stromstärken konstant zu halten, müssen die eingeprägten elektromotorischen Kräfte verstärkt werden; dieselben leisten eine entsprechende Arbeit über das zur Lieferung der Jouleschen Wärme erforderliche Maß hinaus. Diese Arbeit wird zum Teil in die ponderomotorische Arbeit, zum Teil in magnetische Energie verwandelt. In Wirklichkeit sind allerdings die eingeprägten Kräfte konstant, nicht die Stromstärken. Die Stromstärken werden also durch die induzierte elektromotorische Kraft zeitweise geschwächt, wodurch der Vorgang sich kompliziert.

Wir sehen, daß die durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte und die ponderomotorischen Kräfte in enger Beziehung zueinander stehen. Dieser durch das Energieprinzip vermittelte Zusammenhang besteht selbstverständlich auch in allgemeineren Fällen. Die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper können, wenn sie bezüglich der durch Bewegung erregten Felder sich unterscheiden, nicht umhin, auch für die ponderomotorischen Kräfte verschiedene Annahmen zu machen. Wir kommen auf diesen Punkt weiter unten zurück. Von den in diesem Paragraphen dargelegten Wechselwirkungen zweier bewegter Stromringe, die in dem angegebenen Gültigkeitsbereiche von der Erfahrung durchweg bestätigt werden, müssen alle Theorien Rechenschaft geben, auch wenn sie sonst voneinander abweichen mögen.

§ 85. Die Magnetinduktion.

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Falles über, wo durch einen linearen Leiter ein permanenter Magnet Induktionslinien hindurchsendet. Auch hier setzt das Faradaysche Induktionsgesetz die induzierte elektromotorische Kraft der zeitlichen Abnahme des umschlungenen Induktionsflusses proportional. Wir wollen, um den Vergleich zwischen den Entwickelungen dieses Paragraphen und denen des vorigen zu erleichtern, als Magneten eine magnetische Schale wählen. Wir bezeichnen mit J_1' die Stromstärke des längs der Umfangslinie zu fin-

gierenden Stromes, welcher der Schale äquivalent ist (vgl. § 81). Der gesamte Induktionsfluß durch eine vom Strome J_2 umrandete Fläche hindurch ist dann

$$\frac{1}{c^2} L_{12} J_1' + \frac{1}{c^2} L_{22} J_2;$$

aus dem Induktionsgesetz folgt daher als induzierte elektromotorische Kraft im Stromringe

$$E_2' = -\frac{1}{c^2} J_1' \frac{dL_{12}}{dt} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(L_{22} J_2). \tag{240}$$

In der Tat, die fingierte Stromstärke J_1' des den Magneten ersetzenden Stromes ist konstant, weil durch die remanente Magnetisierung bestimmt. Eine Induktion kann daher nur durch Lagenänderung des Magneten oder des Stromes eintreten. Dazu tritt dann die im zweiten Gliede enthaltene Selbstinduktion, herrührend von Stromschwankungen im Stromringe oder von Formänderung desselben.

Was nun die ponderomotorischen Kräfte anbelangt, so sind diese ohne weiteres anzugeben. Wissen wir doch aus den Entwickelungen des § 81, daß hinsichtlich der ausgeübten ponderomotorischen Kräfte sowohl, wie hinsichtlich derjenigen Kräfte, die sie erleidet, die magnetische Schale dem linearen Strome J_1' im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent ist. Wir erhalten demnach die Arbeit, welche die ponderomotorischen Kräfte bei einer langsamen Bewegung des Stromes bzw. des starren Magneten leisten, indem wir in (238d) an Stelle von J_1 jetzt J_1' setzen. Dabei ist zu beachten, daß L_{11}, die Größe, welche dem Selbstinduktionskoeffizienten des äquivalenten Stromes entsprechen würde, für den Magneten als starren Körper konstant ist. Es ist demnach

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{c^2} J_2 \left(J_1' \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{1}{2} J_2 \frac{dL_{22}}{dt} \right) \tag{240a}$$

die Arbeitsleistung der ponderomotorischen Kräfte, die zwischen dem Magneten und dem Strome wirksam sind.

Wir müssen nun, um das Energieprinzip auch für die Magnetinduktion als gültig nachzuweisen, die Feldenergie des

Systemes bestimmen, das von dem Strome und dem Magnete gebildet wird. Wir haben zwar die Energie eines nur aus elektrischen Strömen oder nur aus Magneten bestehenden Systemes berechnet. Aber gerade die hier vorliegende Aufgabe ist noch nicht gelöst.

Wir knüpfen, um ihre Lösung zu ermitteln, am besten an die Entwickelungen des § 80 an. Wir fanden dort für die Änderung der Energiedichte im Innern eines magnetisch harten Körpers

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} = \frac{1}{8\pi}\,d\mathfrak{H}^2.$$

Derselbe Ausdruck gilt in dem umgebenden Raume und auch in dem Stromleiter, wenn die Permeabilität daselbst gleich 1 ist. Wir wollen das annehmen. Dann gilt auch hier die Gleichung (233), welche die Feldenergie T bis auf eine Konstante bestimmt; wir setzen

$$T = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 + \text{const.} \tag{240b}$$

Das Feld $\mathfrak{H}$ ist im Magneten wirbelfrei (Gl. 230), im Stromleiter ist es quellenfrei, da $\mu = 1$ und $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ ist. Im übrigen Teile des Feldes ist es sowohl quellenfrei wie wirbelfrei. Wir können es daher in der im § 28 dargelegten Weise in ein wirbelfreies Feld $\mathfrak{H}'$ und ein quellenfreies Feld $\mathfrak{H}''$ zerlegen; $\mathfrak{H}'$ ist das vom Magneten allein, $\mathfrak{H}''$ das vom Strome allein erregte Feld; durch Superposition dieser beiden Felder entsteht das wirkliche Feld. Aus den Entwickelungen des § 28 geht nun hervor, daß allgemein

$$\int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{H}'^2 + \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{H}''^2$$

gilt. Es folgt daher

$$T = T' + T'', \tag{240c}$$

wo T' die konstante Energie des Magneten allein, bei Abwesenheit des Stromes, ist, während

$$T'' = \int \frac{dv}{8\pi}\,\mathfrak{H}''^2 = \frac{1}{2c^2}\,L_{22}\,J_2^2$$

die Feldenergie des Stromes im leeren Raume ist. Es superponieren sich demnach die Energien des remanenten Magneten und des Stromes. Bleibt der Stromring nach Form und Stromstärke ungeändert, so ist die Feldenergie von der Lage des Magneten und des Stromes unabhängig.

Wir wollen jetzt prüfen, ob diese Konsequenz unserer Annahmen über permanente Magnete mit dem Energieprinzip in Übereinstimmung ist. Wir erhalten für die zeitliche Änderung der Feldenergie, da ja die Energie des Magneten konstant ist,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2}\left\{ L_{22} J_2 \frac{dJ_2}{dt} + \frac{1}{2} J_2^2 \frac{dL_{22}}{dt} \right\}. \tag{240d}$$

Addiert man hierzu die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte (240a), so folgt

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c^2} J_2 \left\{ J_1' \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{d}{dt}(L_{22} J_2) \right\}. \tag{240e}$$

Berücksichtigt man den Ausdruck (240) für die induzierte elektromotorische Kraft der Magnetinduktion, so folgt:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = - J_2 E_2^i; \tag{240f}$$

die Summe aus Arbeit der ponderomotorischen Kräfte und Zunahme der magnetischen Feldenergie ist gleich der negativen Arbeit der im Stromringe induzierten Kraft. Dieses Resultat entspricht dem in der Gleichung (239) für zwei Stromringe enthaltenen. Da die negative induzierte elektromotorische Kraft

$$- E_2^i = E_2^e - J_2 R_2$$

ist, so können wir (240f) auch schreiben:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dT}{dt} = J_2 E_2^e - J_2^2 R_2. \tag{240g}$$

Die Arbeit der eingeprägten elektromotorischen Kräfte im Stromringe wird demnach, soweit sie nicht als Joulesche Wärme verzehrt wird, in mechanische Arbeit (240a) umgewandelt, bzw. zur Steigerung der Stromenergie verwandt. Ein von der relativen Lage des

Magneten und des Stromes abhängiger Energieanteil ist dabei nicht angenommen worden. Dennoch genügen die vorausgesetzten elektromotorischen Kräfte der Magnetinduktion dem Energieprinzip.

Den Entwickelungen dieses Paragraphen liegt, ebenso wie denen des vorigen, die Annahme zugrunde, daß die Bewegungen des Stromes, bzw. des Magneten, hinreichend langsam erfolgen. Anderenfalls wäre es nicht erlaubt, die Feldenergie der Energie des in der betreffenden Konfiguration ruhend verharrenden Systemes gleichzusetzen, und die ponderomotorischen Kräfte einfach mit denen zu identifizieren, welche Magnet und Strom, wenn unbeweglich, aufeinander ausüben würden. Indem wir die Annahme langsamer Bewegung zugrunde legten, haben wir stillschweigend das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung eingeführt, das ja für ruhende Ströme und Magnete allgemein bewiesen wurde. Auch haben wir die ponderomotorischen, und ebenso die durch das Energieprinzip mit ihnen verknüpften elektromotorischen Kräfte nur von der relativen Lage der Körper abhängig gemacht. Bei allen in den Gültigkeitsbereich der beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels fallenden Vorgängen gilt mithin das sogenannte Prinzip der Relativbewegung; es hängen die Vorgänge nur von der relativen Bewegung der materiellen Körper ab, eine hinzugefügte gleichförmige Translation oder Rotation des ganzen Systemes ändert weder die ponderomotorischen noch die elektromotorischen Kräfte, welche in dem System wirksam sind.

§ 86. Die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper.

Wir haben bisher das Induktionsgesetz nur auf bewegte lineare Leiter angewandt. Nun führt das Induktionsgesetz, auf Flächenelemente angewandt, zur zweiten Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie (vgl. § 59). Indem wir das Induktionsgesetz auf bewegte Flächen bzw. Kurven übertragen, und sodann zu unendlich kleinen Gebietsteilen übergehen, gelangen wir dazu, die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper aufzustellen.

Wir denken uns in einem beliebig bewegten Körpersystem zur Zeit t eine Fläche f. Die materiellen Punkte dieser Fläche werden zur Zeit $t + dt$ infolge der Bewegung in andere Lagen gelangt sein, von diesen materiellen Punkten gebildete Fläche f wird dabei gewisse Deformationen erfahren haben. Wir bestimmen den Induktionsfluß durch f einmal zur Zeit t, sodann zur Zeit $t + dt$. Das verallgemeinerte Induktionsgesetz besagt nun: Die zeitliche Abnahme des Induktionsflusses, geteilt durch c, ist auch für die bewegte Fläche gleich dem Linienintegrale der induzierten elektromotorischen Kraft, erstreckt über die Randkurve der Fläche.

$$(241) \qquad E^i = \int \mathfrak{E}^i \, d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu.$$

Für die zeitliche Änderung des Flächenintegrales eines Vektors, erstreckt über eine bewegte Fläche, hatten wir bereits in § 32 allgemeine Formeln abgeleitet. Die Gleichung (122) jenes Paragraphen ergibt

$$\frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu = \int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B}\right\}_\nu,$$

wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Punkte der Fläche bezeichnet; sie gilt für eine ganz beliebige, stetige Bewegung des Körpers, und ist keineswegs etwa auf starre Körper beschränkt. Formen wir nun die linke Seite von (241) mit Hilfe des Stokesschen Satzes um, und berücksichtigen, ebenso wie bei den entsprechenden Entwickelungen des § 59, daß die resultierende Feldstärke $\mathfrak{E}$ sich additiv zusammensetzt aus der eingeprägten elektrischen Kraft $\mathfrak{E}^e$, der wirbelfreien Feldstärke $\mathfrak{E}'$, und der induzierten Kraft $\mathfrak{E}^i$, so erhalten wir

$$(241\,a) \int df \operatorname{curl}_\nu \{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B}\right\}_\nu$$

und, durch Übergang zu Flächenelementen

$$(241\,b) \quad \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B}\right\}.$$

Diese Formulierung der zweiten Hauptgleichung für einen bewegten Körper entspricht der von Heinrich Hertz entworfenen Theorie, die in seiner Abhandlung „Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper" enthalten ist (Ges. Werke II, S. 256). Hertz operiert noch mit der Annahme von wahrem Magnetismus. Wir wollen, der hier vertretenen Auffassung getreu, solchen ausschließen, und daher div $\mathfrak{B}$ durchweg gleich Null setzen. Dann lautet die zweite Hauptgleichung

$$\text{(242)} \qquad \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'\} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\right\}.$$

Das erste Glied der rechten Seite zeigt die Änderung des Vektors $\mathfrak{B}$ an, die auch in dem ruhenden Körper stattfinden würde, während das zweite Glied von der infolge der Bewegung hinzukommenden Änderung des Induktionsflusses herrührt.

Wir wollen, um die Bedeutung dieses zweiten Gliedes zu erkennen, den Fall ins Auge fassen, daß ein Körper sich in einem konstanten, etwa von einem ruhenden Magneten oder von einem ruhenden stationären elektrischen Strome erzeugten magnetischen Felde bewegt. Dann wird

$$\text{(242a)} \qquad \operatorname{curl}\mathfrak{E}' = \operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'\} = -\frac{1}{c}\operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}].$$

Das Linienintegral der durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kraft ist daher

$$\text{(242b)} \qquad E' = \int \mathfrak{E}' d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\int [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{s},$$

für eine beliebige, aus materiellen Punkten des Körpers gebildete Kurve $\mathfrak{s}$. Auf Grund der Rechnungsregel (31) können wir die rechte Seite auf die Form bringen:

$$\text{(242c)} \qquad E' = -\frac{1}{c}\int \mathfrak{B}\,[\mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}].$$

Das äußere Produkt $[\mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}]$ stellt das Parallelogramm dar, welches von dem Linienelemente $d\mathfrak{s}$ des Körpers bei seiner Bewegung beschrieben wird; mithin gibt das innere Produkt aus $\mathfrak{B}$ und jenem Vektor die Zahl der von dem Linienelemente

$d\mathfrak{s}$ bei seiner Bewegung durchschnittenen Induktionslinien an, d. h. den Induktionsfluß durch jenes Parallelogramm; denkt man sich den Umfang des Parallelogramms in dem durch die Reihenfolge der Vektoren $\mathfrak{v}$, $d\mathfrak{s}$ im Vektorprodukte festgelegten Sinne von einem elektrischen Strome durchflossen, so ordnet der Induktionsfluß $\mathfrak{B}\,[\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}]$ sich diesem Umlaufssinn als positiv zu. Die von einem Stromfaden $\mathfrak{s}$ umrandete Fläche, deren Elemente mit einem Umlaufssinne zu versehen sind, erhält durch die Bewegung eines jeden Elementes des Stromfadens den Zuwachs $[\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}]$. Der dabei stattfindende Zuwachs des Induktionsflusses beträgt im ganzen

$$\int \mathfrak{B}\,[\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}],$$

so daß der Ausdruck (242c) für das längs des Fadens genommene Integral der induzierten elektromotorischen Kraft durchaus mit der Ausgangsgleichung (241) übereinstimmt.

Aus (242a) geht hervor, daß die Wirbel der durch Bewegung induzierten Kraft $\mathfrak{E}'$ mit den Wirbeln des Vektors

$$-\frac{1}{c}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}] = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]$$

übereinstimmen. Dadurch ist der Vektor $\mathfrak{E}'$ selbst noch nicht eindeutig bestimmt, da er neben den Wirbeln auch Quellen besitzen kann. Jedenfalls aber ist die vektorielle Differenz der Vektoren

$$\mathfrak{E}' \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]$$

wirbelfrei, so daß

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}] - \nabla\Phi \tag{242d}$$

zu setzen ist.

Der hier noch unbestimmt gelassene, als Gradient des Skalars Φ sich darstellende Bestandteil kommt indessen nicht in Betracht, wenn es sich nur um die Bestimmung des Linienintegrals der induzierten Kraft handelt. Da meist das Bestehen der durch Bewegung im Magnetfelde induzierten elektrischen Kräfte durch Messung des in einer geschlossenen Leitung

hervorgerufenen Stromes festgestellt wird, so kommt es oft gerade auf die Kenntnis jenes Linienintegrals an. Dieses ist durch die Wirbel von $\mathfrak{E}'$ bestimmt, die mit den Wirbeln von $\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ identisch sind.

Wir haben bisher die Bewegung des Körpers im Magnetfeld als stetig verteilt angenommen. Wir gehen jetzt zu dem Grenzfalle über, wo die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ räumliche Unstetigkeiten aufweist. Wir betrachten zwei Körper, die längs ihrer Trennungsfläche aneinander vorbeigleiten. An einer solchen Gleitfläche wird im allgemeinen ein Flächenwirbel des Vektors $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ auftreten. Der allgemeine Ausdruck des Flächenwirbels (104) ergibt hier

$$[\mathfrak{n}, [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]_1 - [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]_2],$$

wo der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ in diejenige Normale ν der Gleitfläche fällt, die von der durch (2) gekennzeichneten Seite nach der durch (1) angezeigten weist.

Nach der Regel (32) ist nun

$$[\mathfrak{n}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]] = \mathfrak{v}\cdot(\mathfrak{n}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{n}\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{B}_\nu - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{v}_\nu.$$

Da nun $\mathfrak{B}_\nu$ stetig die Trennungsfläche durchsetzt — wahrer Magnetismus ist ja ausgeschlossen — und Unstetigkeiten von $\mathfrak{v}_\nu$ ebenfalls nicht angenommen werden, so ist die Differenz der auf den beiden Seiten der Gleitfläche geltenden Werte

$$\mathfrak{B}_\nu(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2) - \mathfrak{v}_\nu(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2). \tag{242e}$$

Das ist also der allgemeine Ausdruck des Flächenwirbels von $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$. Führen wir ein kartesisches Achsenkreuz ein, dessen x-Achse in dem betreffenden Punkte der Fläche in die Normalenrichtung ν fällt, so sind die Komponenten des Flächenwirbels parallel der y-Achse und der z-Achse:

$$\begin{cases} \mathfrak{B}_x(\mathfrak{v}_{1y} - \mathfrak{v}_{2y}) - \mathfrak{v}_x(\mathfrak{B}_{1y} - \mathfrak{B}_{2y}), \\ \mathfrak{B}_x(\mathfrak{v}_{1z} - \mathfrak{v}_{2z}) - \mathfrak{v}_x(\mathfrak{B}_{1z} - \mathfrak{B}_{2z}). \end{cases} \tag{242f}$$

Die Komponente parallel der x-Achse ist selbstverständlich Null.

Besitzen die Oberflächen der beiden Körper, die aneinander entlang gleiten, nicht neben der tangentiellen Geschwindigkeit der Gleitbewegung eine gemeinsame normale Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_n$, so vereinfacht sich Gleichung (242c) noch. Es ist dann der Flächenwirbel von $\mathfrak{E}^i$, der durch Division durch c erhalten wird,

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{E}_1^i - \mathfrak{E}_2^i] = \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2) \cdot \mathfrak{B}_n, \tag{243}$$

oder in kartesischer Schreibweise

$$\begin{cases} -(\mathfrak{E}_{1z}^i - \mathfrak{E}_{2z}^i) = \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_{1y} - \mathfrak{v}_{2y})\mathfrak{B}_n, \\ +(\mathfrak{E}_{1y}^i - \mathfrak{E}_{2y}^i) = \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_{1z} - \mathfrak{v}_{2z})\mathfrak{B}_n. \end{cases} \tag{243a}$$

Die durch Bewegung induzierte elektromotorische Kraft hat an Gleitflächen einen Flächenwirbel, der dem Produkte aus dem Geschwindigkeitssprung und der normalen Komponente von $\mathfrak{B}$, geteilt durch c, gleich ist (falls $\mathfrak{v}_n = 0$ ist).

Wir haben die zweite Hauptgleichung bisher nur auf den Fall angewandt, daß der Magnet bzw. der elektrische Strom, welche das magnetische Feld erzeugen, in Ruhe sind; in Körpern, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen, treten dann die angegebenen induzierten elektrischen Kräfte auf. Wie liegt nun die Sache, wenn der Magnet bzw. der Strom, von denen das Feld erregt wird, ihrerseits in Bewegung begriffen sind? Wir haben bereits in den beiden letzten Paragraphen gesehen, daß man von den Erfahrungen über Induktion durch Bewegung Rechenschaft geben kann, wenn man annimmt, daß der Magnet bzw. der Strom bei ihrer Bewegung das Feld einfach mitführen; freilich ist zu betonen, daß diese Erfahrungen sich auf „langsame Bewegungen" beschränken, d. h. auf Bewegungen, deren Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. In einem Körper, der relativ zum Magneten ruht, tritt eine induzierte elektrische Kraft nicht auf; es behält der Vektor $\mathfrak{B}$ auch bei der Bewegung an jedem Punkte des Körpers seinen Wert. Induzierte Kräfte treten

nur dann auf, wenn der Körper relativ zum Magneten sich bewegt. Der Wirbel der induzierten elektrischen Kraft wird auch jetzt durch (242a) gegeben, wobei $\mathfrak{v}$, die Geschwindigkeit der materiellen Punkte des bewegten Körpers, jetzt auf ein mit dem Magneten starr verbundenes Bezugssystem zu beziehen ist. Es kommt demnach nur die Relativgeschwindigkeit der materiellen Körper für die Induktionserscheinungen in Betracht. In einem Systeme, das als Ganzes genommen in translatorischer oder rotatorischer Bewegung begriffen ist, verlaufen die Induktionsvorgänge wie in einem ruhenden Systeme.

Daß diese Auffassung in einem gewissen Gebiete den Erfahrungen entspricht, erkennt man schon daraus, daß unsere Erfahrungen eigentlich in einem bewegten Systeme, nämlich an der Erdoberfläche, gewonnen sind. Dennoch ließ sich die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen entwickeln, ohne von der Erdbewegung zu reden. Aus den elektromagnetischen Wechselwirkungen von Körpern, die sich mit der Erde bewegen, ist demgemäß ein Anhaltspunkt für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Erdbewegung nicht zu gewinnen. Hieraus folgt, daß für Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Geschwindigkeit der Bewegung der Erde um die Sonne, d. h. für

$$\frac{|\mathfrak{v}|}{c} = \beta = 10^{-4},$$

das Prinzip der Relativbewegung auch für die elektromagnetischen Erscheinungen noch gilt, daß solche Bewegungen noch als „langsame Bewegungen“ in dem hier gebrauchten Sinne zu betrachten sind.

Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper legt überhaupt allgemein das Prinzip der Relativbewegung zugrunde, d. h. sie macht die elektromagnetischen Wechselwirkungen durchweg nur von der relativen Bewegung der aufeinander wirkenden Körper abhängig. Wie wir weiter unten sehen werden, lassen sich keineswegs alle Tatsachen mit dieser Auffassung vereinbaren. Bei den hier betrachteten Induktions-

erscheinungen aber bewährt sie sich, wir wollen ihre Konsequenzen daher noch an einem konkreten Falle genauer erörtern, nämlich an den Vorgängen der unipolaren Induktion.

§ 87. Unipolare Induktion.

Als unipolare Induktion bezeichnet man das Auftreten induzierter elektrischer Kräfte infolge der Rotation eines stabförmigen permanenten Magneten um die Stabachse. Mit dem elektrisch leitenden Körper des Magneten ist eine ruhende Drahtschlinge elektrisch verbunden; das eine Ende derselben befindet sich auf der zylindrischen Mantelfläche, das andere auf der Polfläche des Magneten, und zwar meistens in der Rotationsachse. Der Magnet mag etwa symmetrisch zur Rotationsachse magnetisiert sein.

In dem Leitungskreise, der durch den Magneten und die Drahtschlinge gebildet wird, tritt nun infolge der Bewegung des Magneten eine induzierte elektromotorische Kraft auf, die bei fortdauernder Bewegung einen stationären Strom erzeugt. Die induzierte Kraft macht sich natürlich nur dann bemerkbar, wenn die Drahtschlinge nicht mit dem Magneten rotiert. Würde sie mit ihm rotieren, also relativ zum Magneten ruhen, so würde ein Strom nicht entstehen. Dem Prinzipe der Relativbewegung gemäß ist es für das Zustandekommen des Stromes gleichgültig, ob die Drahtschlinge ruht und der Magnet rotiert, oder ob der Magnet ruht und die Drahtschlinge in der entgegengesetzten Richtung rotiert. Es genügt daher, den ersten Fall genauer zu verfolgen.

Ist $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Magneten, u ihr Betrag, r der Abstand von der Rotationsachse, so ist

$$|\mathfrak{v}| = u \cdot r$$

die Geschwindigkeit, mit der die Punkte des Magneten in Kreisen um die Rotationsachse sich bewegen. Der Vektor $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$ liegt in der Meridianebene; seine Komponente senkrecht zur Rotationsachse ist

$$|\mathfrak{v}| \cdot \mathfrak{B}_s = u \cdot r \cdot \mathfrak{B}_s,$$

wenn $\mathfrak{B}_z$ die Komponente von $\mathfrak{B}$ parallel der Drehachse ist; in der Achse selbst verschwindet jener Vektor.

Wir bezeichnen mit A und B die Endpunkte der Drahtschlinge. A mag sich auf der Mantelfläche, B auf dem Durchschnittspunkte der Polfläche des Magneten mit der Rotationsachse befinden. Fällt man von A das Lot auf die Achse, das diese im Punkte C trifft, so ist ABC ein geschlossener Weg. Für diesen geschlossenen Weg, der zum Teil (AB) in dem Drahte, zum Teil (BC, CA) im Magneten verläuft, berechnen wir das Linienintegral der induzierten elektrischen Kraft aus der Gleichung (242b) des vorigen Paragraphen; dasselbe ist

$$E^i = -\frac{1}{c}\int [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{s} = \frac{1}{c}\int [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\, d\mathfrak{s}.$$

Die Beiträge, welche die Drahtschlinge und die Magnetachse zu dem Integrale liefern, sind Null, weil auf beiden $\mathfrak{v}$ gleich Null ist. Es liefert nur die zur Achse senkrechte Strecke CA einen Beitrag; ist a die Länge dieser Strecke, so wird

$$E^i = \frac{u}{c} \cdot \int_0^a \mathfrak{B}_z r\, dr.$$

Verstehen wir anderseits unter f_a die von CA bei der Rotation beschriebene Kreisfläche, so ist die gesamte Induktion durch f_a

$$\int_0^a 2\pi r\, dr \cdot \mathfrak{B}_z = \int \mathfrak{B}_z\, df_a.$$

Es wird demnach

$$E^i = \frac{u}{2\pi c} \cdot \int \mathfrak{B}_z\, df_a \tag{244}$$

das Linienintegral der induzierten elektromotorischen Kraft für einen Weg, der auf dem Umfange der Kreisfläche f_a aus dem Magneten in den Draht eintritt. Denselben Wert des Integrales hätten wir erhalten, wenn wir den Integrationsweg im Magneten anders gewählt hätten. Die Stromstärke des entstehenden Stromes ist bestimmt durch E^i in Verbindung

mit den Widerständen des Stromkreises, der von dem Drahte und dem Magneten gebildet wird.

Rotiert anderseits der Draht um den ruhenden Magneten, so gilt immer noch der Ausdruck (244); dabei ist dann unter u die Rotationsgeschwindigkeit des Magneten, bezogen auf ein in dem Drahte festes System, zu verstehen, d. h. die negativ genommene Drehgeschwindigkeit des Drahtes.

Die Frage nach dem Sitz der induzierten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{E}'$ brauchen wir, wenn es nur auf die Kenntnis des Linienintegrales E' ankommt, nicht anzuschneiden. Rotiert die Drahtschlinge um den ruhenden Magneten, so wird man als Sitz der elektromotorischen Kraft den Draht, der bei seiner Bewegung die magnetischen Induktionslinien schneidet, anzusehen haben. Rotiert hingegen der Magnet, so ist die Frage schwieriger zu beantworten. Man hat die Frage meistens so gestellt: Rotieren die magnetischen Induktionslinien mit dem Magneten, oder verharren sie außerhalb des Magneten in Ruhe, wenn der Magnet um seine Achse rotiert? Im ersteren Falle wird man den Sitz der induzierten Kraft im Drahte, im letzteren Falle im Magneten zu suchen haben, wenn man diese Kraft aus der Zahl der durchschnittenen Induktionslinien berechnet.

Diese Formulierung der Frage ist indessen kaum als glücklich zu bezeichnen. Denn die Induktionslinien sind doch nur ein Hilfsmittel zur geometrischen Veranschaulichung des Feldes; in einem gegebenen Augenblicke kann man den Verlauf der Induktionslinien verfolgen und aus ihrer Zahl den Induktionsfluß bestimmen, der von einer gegebenen Kurve umschlungen wird. Verändert sich nun das Feld, so entsteht eine neue Verteilung der Induktionslinien und des Induktionsflusses; es ist aber nicht möglich, einer bestimmten Induktionslinie des ersten Feldes eine bestimmte Induktionslinie des zweiten eindeutig zuzuordnen; diese Zuordnung ist auf alle Fälle bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Die Induktionslinien besitzen keine individuelle Existenz, sie können neu entstehen und wieder verschwinden. Der Begriff der

„Bewegung der Induktionslinien“ schwebt daher in der Luft; er ist zur präzisen Fassung der hier vorliegenden Probleme wenig geeignet.

Zur Veranschaulichung der Induktionserscheinungen mag man sich immerhin der Darstellung durch Induktionslinien bedienen. Man kann hier nach Belieben annehmen, daß sie ruhen, oder mit dem Magneten rotieren; man erhält auf jeden Fall den richtigen Wert des Linienintegrales der induzierten Kraft, auf den es allein ankommt.

Berechtigter ist die Frage nach dem elektrischen Felde, welches den mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Magneten umgibt. Dieses wird aber nicht durch $\mathfrak{E}^i$, sondern durch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^i + \mathfrak{E}^s$$

bestimmt, wo $\mathfrak{E}^s$ die elektrostatische Kraft der freien Elektrizität ist. Diese resultierende elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ wird in jedem gegebenen Falle sich eindeutig berechnen lassen. Denkt man sich die Drahtschlinge beseitigt, so fließt in dem rotierenden Magneten kein stationärer Strom. Es muß folglich hier $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Nun ist aber für einen geschlossenen Weg

$$\int \mathfrak{E}^s \, d\mathfrak{s} = 0,$$

daher

$$\int \mathfrak{E} \, d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{E}^i \, d\mathfrak{s} = E^i.$$

Außerhalb des Magneten aber besteht ein konstantes, wirbelfreies und quellenfreies elektrisches Feld. Erstreckt sich das Linienintegral längs des vorhin betrachteten geschlossenen Weges, so liefert das im Luftraume verlaufende Stück des Weges den Beitrag

$$\int_A^B \mathfrak{E} \, d\mathfrak{s} = \varphi_A - \varphi_B,$$

der im Magneten verlaufende Teil des Weges aber trägt nichts bei, weil hier $\mathfrak{E}$ verschwindet. Es ist demnach (vgl. 244)

$$\varphi_A - \varphi_B = E_i = \frac{u}{2\pi c} \int \mathfrak{B}_s \, df_a. \tag{244a}$$

Es ist hierdurch das Potential des Feldes $\mathfrak{E}$ auf der Oberfläche des Magneten bis auf eine additive Konstante bestimmt; im Luftraume gilt außerdem die Laplacesche Gleichung. Bei gegebener Induktion $\mathfrak{B}$ im rotierenden Magneten kann man das äußere elektrische Feld und die Ladungsverteilung aus den gegebenen Ansätzen ableiten, ohne die Frage nach dem Sitze der elektromotorischen Kraft zu berühren.

Die formal einfachste Bestimmung von $\mathfrak{E}'$ wäre die, daß man, unter Beseitigung des wirbelfreien Zusatzgliedes in (242 d),

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

setzte.

Nun erhebt sich aber die Frage, was denn hier $\mathfrak{v}$ bedeutet. Ist die Geschwindigkeit auf ein im Magneten oder in der Drahtschlinge festes Bezugssystem zu beziehen? Und ist die Erdbewegung zu berücksichtigen oder nicht? Es würde also durch jene Entscheidung über $\mathfrak{E}'$ die Frage nach dem Sitze der induzierten Kraft nur auf eine andere zurückgeführt werden. Die beobachtbaren Wirkungen des rotierenden Magneten aber lassen sich bestimmen, ohne weder der einen noch der anderen Frage näher zu treten. Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper, welche nur von relativer Bewegung der Körper spricht, reicht hier vollständig aus.

§ 88. Ponderomotorische Kraft an einem Stromelemente.

Mit den induzierten elektrischen Kräften eng verknüpft sind die ponderomotorischen Kräfte, die an einem Stromkreise angreifen. Wir kennen bereits die Arbeit, welche die ponderomotorischen Kräfte im ganzen an einem linearen Strome leisten. Wir wollen jetzt von der Kraft sprechen, die an einem Stromelemente in einem gegebenen magnetischen Felde wirkt; wir knüpfen dabei unmittelbar an die Erfahrung an.

Ein einzelnes Stromelement für sich ist zwar nicht denkbar, es muß notwendig zu einem geschlossenen Stromkreise gehören; wir können es aber mechanisch von dem

übrigen Stromkreise so sondern, daß die an ihm angreifende Kraft der Messung unmittelbar zugänglich wird. Wir haben zu diesem Zwecke das Stromelement mit dem Reste des Stromkreises durch Gleitstellen zu verbinden, so daß es sich unabhängig bewegen kann und doch von dem Strome durchflossen wird. Verwirklicht wird diese Anordnung in dem bekannten Ampèreschen Fundamentalversuch.

Das Ergebnis der auf diesem Wege gewonnenen Erfahrung läßt sich folgendermaßen formulieren. Die an dem Stromelemente $d\mathfrak{s}$ in einem magnetischen Felde angreifende Kraft $\mathfrak{K}$ ist

$$\mathfrak{K} = \frac{J}{c} \cdot [d\mathfrak{s}\,\mathfrak{B}]. \tag{245}$$

Die Kraft steht demnach immer senkrecht zu $d\mathfrak{s}$. Die zu $d\mathfrak{s}$ parallele Komponente von $\mathfrak{B}$ kommt nicht in Betracht, nur die zu $d\mathfrak{s}$ normale. Zerlegt man $\mathfrak{B}$ in einen zu $d\mathfrak{s}$ parallelen und einen senkrechten Vektor, so folgen $d\mathfrak{s}$, dieser zweite Vektor, und $\mathfrak{K}$ aufeinander, wie die Achsen eines Rechtssystemes. Daß die Dimensionen der beiden Seiten von (245) übereinstimmen, ist mit Hilfe der Dimensionstabelle des § 61 leicht zu prüfen. Aus den Dimensionen der beiden ersten Spalten, in denen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ nicht die gleiche Dimension haben, erkennt man, daß in der Tat nicht $\mathfrak{H}$, sondern der für die magnetische Induktion maßgebende Vektor $\mathfrak{B}$ es ist, der die ponderomotorische Kraft bestimmt; die Einführung von $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{B}$ würde nämlich eine falsche Dimension der rechten Seite ergeben. Das ist darum von Interesse, weil die Beobachtungen der überwiegenden Mehrzahl noch im Luftraume angestellt sind und eine Entscheidung darüber, ob $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{H}$ zu setzen ist, daher nicht ohne weiteres gestatten.

Die virtuelle Arbeit, welche die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ bei einer durch $\delta\mathfrak{r}$ angezeigten Verrückung des Stromelementes leistet, ist

$$\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r} = \frac{J}{c} \cdot \delta\mathfrak{r}\,[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{B}].$$

Nach der Rechnungsregel (31) wird dies

$$\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r} = \frac{J}{c} \cdot \mathfrak{B} \cdot [\delta\mathfrak{r}\,d\mathfrak{s}]. \tag{245a}$$

Dabei stellt das äußere Produkt von $\delta\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{s}$ das Parallelogramm dar, welches das Stromelement bei der virtuellen Verrückung beschreibt. Die skalare Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ ergibt den Induktionsfluß durch das Parallelogramm. Die Verhältnisse entsprechen ganz den bei der Diskussion von (242c) erörterten. Die Arbeit, welche die Kräfte bei einer virtuellen Verrückung des ganzen Stromkreises leisten, ist gleich

$$\delta A = \frac{J}{c} \cdot \int \mathfrak{B}\,[\delta\mathfrak{r}\, d\mathfrak{s}], \tag{245b}$$

d. h. gleich der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke $\frac{J}{c}$, multipliziert mit der Zunahme, welche der vom Stromkreise umschlungene Induktionsfluß infolge der virtuellen Verrückung erfährt, bei konstant gehaltener Stromstärke des Elementes und konstant gehaltener magnetischer Induktion $\mathfrak{B}$ des Feldes. Damit sind wir zu den Beziehungen zurückgelangt, die wir in § 64 zuerst in Anlehnung an die Lagrangeschen Gleichungen dargelegt haben, und die auch den §§ 84 und 85 zugrunde lagen. Die Stromleiter suchen sich immer so zu stellen bzw. zu deformieren, daß der Induktionsfluß, den sie umschlingen, möglichst groß wird.

Vom linearen Leiter zu Volumelementen übergehend, setzen wir

$$J\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{i} \cdot dv$$

und demgemäß für die Kraft, die auf das durchströmte Volumelement im magnetischen Felde wirkt,

$$\mathfrak{K} = dv \cdot \frac{1}{c}[\mathfrak{i}\mathfrak{B}]. \tag{245c}$$

Haben wir es statt des Leitungsstromes mit einem Konvektionsstrome zu tun, indem die Ladung e mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch das magnetische Feld bewegt wird, so ist $J\,d\mathfrak{s}$ durch $e \cdot \mathfrak{v}$ zu ersetzen. Die Kraft $\mathfrak{K}$ wird daher

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{c} \cdot [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]. \tag{246}$$

Diese Kraft weist stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des elektrischen Teilchens und leistet daher bei der Bewegung

desselben keine Arbeit; unter $\mathfrak{v}$ ist hier zunächst die Relativgeschwindigkeit, bezogen auf den das Feld erzeugenden Magneten, zu verstehen.

Ist neben dem magnetischen Felde noch ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ vorhanden, so wirkt auf das ruhende Elektrizitätsteilchen die Kraft $e \cdot \mathfrak{E}$. Bei einer Bewegung tritt noch die Kraft (246) hinzu, so daß im ganzen

(246a) $$\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{F}$$

ist, wo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$$

die auf die Einheit der Ladung berechnete Kraft bezeichnet.

Dieser Ansatz hat sich bei den Beobachtungen an Kathodenstrahlen, in denen man Konvektionsströme bewegter Elektronen zu sehen hat, durchaus bewährt.

Der Definition des Vektors $\mathfrak{B}$, die wir im § 55 gaben, können wir jetzt eine andere Definition an die Seite stellen, die sich auf die Gleichung (245) stützt. Wir denken uns ein bewegliches Stromelement in einen Punkt des Feldes gebracht und die ponderomotorische Kraft für verschiedene Richtungen des Elementes beobachtet. Eine bestimmte Gerade hat die Eigenschaft, daß das Stromelement, mit seiner Achse in die Gerade eingestellt, keine Kraft erfährt; in diese Gerade fällt die Richtung von $\mathfrak{B}$. Der Betrag und Sinn von $\mathfrak{B}$ bestimmt sich dann aus der Kraft auf ein senkrecht zu jener Geraden gestelltes Stromelement. Das Stromelement leistet als Probekörper bei der Untersuchung des Feldes $\mathfrak{B}$ ähnliche Dienste, wie ein elektrisch geladenes ruhendes Holundermarkkügelchen bei der Untersuchung des Feldes $\mathfrak{E}$. Dabei sind dem Probekörper des magnetischen Feldes ähnliche Beschränkungen aufzuerlegen, wie demjenigen des elektrischen Feldes; es müssen nämlich seine Abmessungen klein sein gegen solche Strecken, in denen merkliche Inhomogenitäten des Feldes auftreten.

In dieser Hinsicht ist ein Kathodenstrahlteilchen, das aus konvektiv bewegten Elektronen besteht, als idealer Probekörper zu betrachten. Es kann, der Gleichung (246a) ent-

sprechend, sowohl als Probekörper zur Untersuchung des elektrischen, wie des magnetischen Feldes verwandt werden. Ferner sind seine Abmessungen so gering — den Radius des Elektrons hat man von der Größenordnung 10^{-13} cm anzunehmen —, daß auch recht inhomogene Felder, z. B. die Felder der Lichtwellen, in solchen Bereichen noch als homogen zu betrachten sind. Endlich kann das Kathodenstrahlbündel, infolge der geringen Trägheit der Elektronen, auch sehr raschen Schwankungen des Feldes momentan folgen; es eignet sich daher zur Untersuchung schneller Wechselfelder, in denen materielle Probekörper dem schnellen Wechseln des Feldes nicht zu folgen vermögen. In der Tat hat man Kathodenstrahlen zur Messung solcher Felder verwandt.

Die Gleichung (246a) läßt endlich noch erkennen, daß der Vektor $\mathfrak{B}$ es ist, der als magnetisches Gegenstück dem Vektor $\mathfrak{E}$ gegenübertritt. Während $\mathfrak{E}$ die Wirkung des elektrischen Feldes auf die ruhende Elektrizität bestimmt, bestimmt $\mathfrak{B}$ die Wirkung des magnetischen Feldes auf die bewegte Elektrizität. Anderseits tritt der von der ruhenden wahren Elektrizität entspringenden elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ das den wahren Strom umschlingende magnetische Feld $\mathfrak{H}$ gegenüber. Diese Analogie ist von der Hertz-Heavisideschen verschieden; wir deuteten bereits im § 54 auf sie hin.

§ 89. Die Maxwellschen Spannungen.

Wir denken uns den Raum von einem Medium konstanter Dielektrizitätskonstante und Permeabilität erfüllt. In dem Raume mag ruhende Elektrizität mit der Dichte ϱ verteilt sein, und es mögen stationäre elektrische Ströme daselbst fließen, von der Stromdichte $\mathfrak{i}$. Wir grenzen durch eine Fläche f einen Teil des Raumes ab und berechnen die resultierende ponderomotorische Kraft, welche infolge des bestehenden Feldes auf den von f begrenzten Raum wirkt. Diese Kraft $\mathfrak{K}$ besteht aus zwei Teilen

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^e + \mathfrak{K}^m. \tag{247}$$

Der erste Teil, die ponderomotorische Kraft des elektrischen Feldes, ist

$$\mathfrak{K}^e = \int dv\, \varrho\, \mathfrak{E}, \tag{247a}$$

der zweite, die ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes, ist

$$\mathfrak{K}^m = \int dv \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}, \mathfrak{B}\right]. \tag{247b}$$

Wir wollen jeden der beiden Teile gesondert behandeln; wir werden sehen, daß sich die Volumintegrale im Integrale über die Oberfläche verwandeln lassen.

Es ist allgemein

$$\mathfrak{E}_x \cdot 4\pi\varrho = \varepsilon\, \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varepsilon \mathfrak{E}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right),$$

ferner

$$[\varepsilon \mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{E}]_x = \varepsilon \mathfrak{E}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) - \varepsilon \mathfrak{E}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right),$$

daher

$$4\pi\varrho \mathfrak{E}_x - [\varepsilon \mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{E}]_x = \varepsilon \left\{\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z)\right\}.$$

Wir integrieren jetzt über den Bereich v, der von der geschlossenen Fläche f begrenzt wird. Es wird

$$\int dv \{4\pi\varrho \mathfrak{E}_x - [\varepsilon \mathfrak{E}, \operatorname{curl} \mathfrak{E}]_x\} = \int dv \left\{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\varepsilon}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z)\right\}.$$

Deuten wir für den Augenblick die Größen

$$\frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \quad \varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y, \quad \varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z$$

als Komponenten eines Vektors, so steht rechts das Volumintegral der Divergenz eines Vektors; dasselbe geht vermöge des Gaußschen Satzes über in das über die Begrenzungs-

fläche f erstreckte Integral der Normalkomponente; diese Normalkomponente würde sein

$$\frac{1}{2}\{(2\varepsilon\mathfrak{E}_x^2 - \varepsilon\mathfrak{E}^2)\cos\nu x + 2\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\cos\nu y + 2\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z\cos\nu z\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\{2\varepsilon\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_\nu - \varepsilon\mathfrak{E}^2\cos(\nu x)\}.$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{T}^e$ den Vektor

$$\mathfrak{T}^e = \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{E}\cdot 2\varepsilon\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{n}\cdot\varepsilon\mathfrak{E}^2\} \tag{248}$$

($\mathfrak{n}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen von f), so wird

$$\int dv\{4\pi\varrho\mathfrak{E}_x - [\varepsilon\mathfrak{E}, \operatorname{curl}\mathfrak{E}]_x\} = 4\pi\int df\mathfrak{T}_x^e. \tag{248a}$$

Da nun gemäß der zweiten Hauptgleichung (178) bei fehlenden eingeprägten Kräften

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$$

ist, so gilt allgemein

$$\int dv\cdot\varrho\mathfrak{E}_x + \int dv\cdot\frac{1}{c}\Big[\mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\Big]_x = \int df\mathfrak{T}_x^e.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Komponenten. Wir fassen sie zu der Vektorgleichung zusammen

$$\int dv\varrho\mathfrak{E} + \int dv\frac{1}{c}\Big[\mathfrak{D}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\Big] = \int df\mathfrak{T}^e. \tag{248b}$$

Diese Beziehung besteht für ein beliebiges Feld in dem ruhenden Körpersysteme.

In unserem Falle insbesondere sollen die Ströme, welche das Feld $\mathfrak{B}$ erzeugen, stationär sein, so daß $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$ gleich Null ist. Die linke Seite von (248b) wird dann identisch mit der Kraft $\mathfrak{K}^e$, welche auf die in dem Bereiche v enthaltene ruhende Elektrizität wirkt. Es wird jetzt

$$\mathfrak{K}^e = \int df\mathfrak{T}^e. \tag{248c}$$

Es läßt sich demnach die resultierende Kraft des elektrischen Feldes auf das Innere der Fläche f ersetzen durch ein über die Fläche selbst verteiltes Kräftesystem, wie wir auch die Fläche f legen mögen.

Wir wollen diese flächenhaft verteilte Kraft genauer diskutieren. Wir betrachten zuerst ein Flächenelement, das senkrecht zur Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$ gestellt ist. Nach (248) liefert dieses Flächenelement zur resultierenden Kraft einen Anteil, der parallel der Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ ist

$$\frac{\mathfrak{n}}{8\pi} \cdot \varepsilon \mathfrak{E}^2 df = \mathfrak{n} \cdot \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) df.$$

Nun war $\mathfrak{n}$ jedesmal die nach der Fläche hinweisende Normale. Das Kräftesystem, welches längs der Fläche verteilt anzunehmen ist, entspricht demnach hier einem auf das Innere ausgeübten Zuge, dessen Betrag gleich der Energiedichte ist.

Wir legen zweitens ein Flächenelement parallel zur Richtung des Vektors $\mathfrak{E}$; dieses übt auf den begrenzten Raum eine Kraft aus

$$-\frac{\mathfrak{n}}{8\pi} \cdot \varepsilon \mathfrak{E}^2 \cdot df = -\mathfrak{n} \cdot \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) \cdot df.$$

Auch diese Kraft ist, pro Flächeneinheit berechnet, ihrem Betrage nach der elektrischen Energiedichte gleich, ihre Richtung ist indessen der Normalen $\mathfrak{n}$ entgegengesetzt, diese Kraft ist daher eine Druckkraft.

Das flächenhaft verteilte Kräftesystem, zu dem wir gelangt sind, entspricht demnach einer Zugspannung längs der elektrischen Kraftlinien und einer Druckspannung senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien. Der Betrag beider ist der elektrischen Energiedichte gleich.

Einen Längszug und Querdruck der Kraftlinien nahm bereits Faraday an; er deutete so vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus die ponderomotorischen Kräfte des elektrostatischen Feldes. Maxwell zeigte, daß dieses Spannungssystem zu den wohlbekannten Kräften führt, welche elektrisch geladene Körper aufeinander ausüben. Die Resultante der pondero-

motorischen Kräfte, welche von den außerhalb der Fläche f befindlichen Körpern auf die innerhalb derselben gelegenen im elektrostatischen Felde ausgeübt werden, läßt sich vollständig durch das längs der Oberfläche verteilte Kräftesystem $\mathfrak{T}^e$ (Gleichung 248) ersetzen. Anderseits ersetzt dasselbe bei umgekehrtem Normalensinn diejenigen Kräfte, welche das Innere von f auf das Äußere ausübt. Denn das über die Fläche f erstreckte Integral von $\mathfrak{T}^e$, zusammen mit dem über eine unendlich entfernte und keinen Beitrag liefernde Fläche, stellt die resultierende Kraft auf die außerhalb der Fläche f gelegenen Körper dar. Da nun nach (248) in einem stetig verteilten Felde mit der Richtung von $\mathfrak{n}$ das Vorzeichen von $\mathfrak{T}^e$ sich umkehrt, ohne daß sein Betrag sich ändert, so folgt: Die Kräfte, welche die durch eine Fläche f voneinander getrennten Teile des elektrostatischen Feldes aufeinander ausüben, erfüllen das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung, wenn anders sie sich durch das Maxwellsche Spannungssystem ersetzen lassen.

Daß dieses nicht nur bezüglich der resultierenden Kraft, sondern auch bezüglich der Drehkraft gilt, das zeigt die folgende Betrachtung. Wir denken uns den Bereich v in kleine Zellen geteilt. Die Kraft auf jede einzelne dieser Zellen ersetzen wir durch das über ihre Begrenzung verteilte Kräftesystem $\mathfrak{T}^e$. Dann ist nicht nur die resultierende Kraft, sondern auch die resultierende Drehkraft der auf die Zellen wirkenden Elementarkräfte der aus den Kräften $\mathfrak{T}^e$ resultierenden Kraft bzw. Drehkraft äquivalent. Bei der Zusammensetzung der über die Oberflächen der Zellen verteilten Kräfte $\mathfrak{T}^e$ heben sich nun die Beiträge der Trennungsflächen aneinanderstoßender Zellen heraus und es bleibt nur diejenige Kraft und Drehkraft übrig, welche aus den über die Oberfläche des ganzen Bereiches v verteilten Flächenkräften $\mathfrak{T}^e$ resultiert. Die Einwirkungen, welche starre Körper im elektrostatischen Felde erfahren, lassen sich also vollständig durch das über die Begrenzungsfläche verteilte Kräftesystem $\mathfrak{T}^e$ ersetzen. Daraus folgt nun weiter, daß die Wechselwirkungen der innerhalb

und außerhalb f gelegenen Körper das Gesetz von aktio und relatio nicht nur hinsichtlich der Kräfte, sondern auch der Drehkräfte erfüllen. Denn die Flächenkräfte $\mathfrak{T}'$, welche auf das Innere und Äußere von f wirken, sind entgegengesetzt gleich.

Wir gehen jetzt zum magnetischen Felde über, dessen Wirkung auf elektrische Ströme durch (247b) gegeben ist; auch dieses Volumintegral läßt sich in ein Oberflächenintegral umwandeln. Um dies zu zeigen, betrachten wir den vektoriellen Ausdruck

$$\int dv\{4\pi\varrho_m\mathfrak{H} - [\mu\mathfrak{H}, \operatorname{curl}\mathfrak{H}]\}.$$

Seine Komponenten können wir in ganz derselben Weise umformen, wie oben die Komponenten des entsprechenden Ausdruckes in $\mathfrak{E}$, denn die Umformungen, die oben vorgenommen wurden, sind in derselben Weise mit einem jeden Vektor vorzunehmen, unabhängig von seiner physikalischen Bedeutung. Setzen wir demgemäß

$$\mathfrak{T}^m = \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{H}\cdot 2\mu\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}\cdot\mu\mathfrak{H}^2\}, \tag{249}$$

so gilt die (248a) entsprechende Gleichung

$$\int dv\{4\pi\varrho_m\cdot\mathfrak{H}_x - [\mu\mathfrak{H}, \operatorname{curl}\mathfrak{H}]_x\} = 4\pi\int df\mathfrak{T}^m_x. \tag{249a}$$

Nun ist aber hier, da wahrer Magnetismus nicht angenommen wird,

$$4\pi\varrho_m = \operatorname{div}\mathfrak{B} = \mu\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Ferner ergibt die erste Hauptgleichung

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\cdot\mathfrak{k}.$$

Es folgt daher

$$\int dv\left[\frac{\mathfrak{k}}{c}, \mathfrak{B}\right] = \int df\mathfrak{T}^m \tag{249b}$$

für ein beliebiges elektromagnetisches Feld.

In dem hier zu betrachtenden Felde stationärer elektrischer Ströme wird die Dichte $\mathfrak{k}$ des wahren Stromes der des Leitungs-

stromes $\mathfrak{i}$ gleich und demnach die linke Seite von (249b) mit der Kraft $\mathfrak{K}^m$ (Gleichung 247b) identisch.

$$\mathfrak{K}^m = \int df \mathfrak{T}^m. \tag{249c}$$

Im magnetischen Felde stationärer elektrischer Ströme sind hiernach Spannungen anzunehmen, welche den im elektrischen Felde anzunehmenden vollkommen entsprechen. Es findet ein Längszug parallel und ein Querdruck senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien statt; der Betrag dieser Spannungen ist der magnetischen Energiedichte

$$\frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H}$$

gleich.

Das System der Flächenkräfte $\mathfrak{T}^m$, das durch (249) bestimmt ist, ersetzt vollständig, sowohl bezüglich der resultierenden Kraft, als auch bezüglich der resultierenden Drehkraft, das System $\mathfrak{K}^m$ der auf das Innere der Fläche f infolge des magnetischen Feldes ausgeübten Kräfte, wenigstens in dem hier behandelten Falle einer durchweg konstanten Permeabilität. Daraus, daß die wechselseitigen Wirkungen zweier Systeme elektrischer Ströme, von denen das eine innerhalb, das andere außerhalb der Fläche f liegt, sich durch das System von Flächenkräften $\mathfrak{T}^m$ ersetzen lassen, welches dem Gesetze der Wirkung und Gegenwirkung stets Genüge leistet, folgt ohne weiteres, daß das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung allgemein für die Wechselwirkung ruhender Ströme gilt, sowohl hinsichtlich der resultierenden Kräfte, wie hinsichtlich der Drehkräfte.

Von den Kräften, die auf permanente Magnete wirken, haben wir bisher nicht gesprochen. Es ist indessen leicht einzusehen, daß die Kräfte, die auf solche im magnetischen Felde wirken, gleichfalls durch die über ihre Oberfläche verteilten Maxwellschen Spannungen (249) darzustellen sind. Wir können den Nachweis auf zwei verschiedenen Wegen führen, die bzw. der im § 80 und im § 81 entwickelten Dar-

stellung des Feldes remanenter Magnete entsprechen. In der ersteren Darstellung wurde die Kraft auf die Volumeinheit des magnetisierten Körpers durch

$$\mathfrak{H} \cdot \varrho'_m = \mathfrak{H} \cdot \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H}$$

gegeben. Die resultierende Kraft entspricht hier ganz der Kraft (247a), die das elektrische Feld auf elektrische Ladungen im Äther ausübt; sie läßt sich daher durch das System von Flächenkräften $\mathfrak{T}^m$, welches ganz den elektrischen Flächenkräften $\mathfrak{T}^e$ entspricht, ersetzen. Das Bild des § 81 führt zu demselben Resultate; denn es ersetzt den remanenten Magneten durch ein äquivalentes Stromsystem und ergibt, daß der remanente Magnet Kräfte erfährt, welche den auf das Stromsystem wirkenden im Sinne der Mechanik starrer Körper äquivalent sind. Die Kräfte, welche auf einen starren Magneten im leeren Raume wirken, lassen sich daher ebenso wie die Kräfte auf das äquivalente Stromsystem durch das über eine ihn einschließende Fläche verteilte System der Flächenkräfte $\mathfrak{T}^m$ ersetzen.

Es wurde angenommen, daß das Feld von einem Medium konstanter Permeabilität und Dielektrizitätskonstante erfüllt ist. Da komprimierbare Körper, z. B. Gase, im Felde Dichteänderungen erfahren, so werden die in solchen Körpern anzunehmenden Spannungen nicht vollständig durch die angenommenen Werte von $\mathfrak{T}^e$ und $\mathfrak{T}^m$ wiedergegeben. Doch würde ein Eingehen auf die strengere, die elastischen Eigenschaften der Körper berücksichtigende Theorie der elektrischen und magnetischen Drucke hier zu weit führen.

Wir haben bisher die Betrachtung auf ruhende Körper beschränkt, die sich in einem konstanten elektrischen und magnetischen Felde befinden. Hier läßt sich die Kraft und die Drehkraft durch Überlagerung der elektrischen und magnetischen Flächenkräfte berechnen, woraus dann allgemein folgt, daß die Kräfte und Drehkräfte, welche zwei Körper durch die Trennungsfläche hindurch aufeinander ausüben, dem dritten Axiome Newtons Genüge leisten. Was findet nun aber statt,

wenn die Körper sich bewegen und wenn das elektromagnetische Feld sich verändert? Auf langsame Veränderungen des Feldes (quasistationäre Ströme) und langsame Bewegung der Körper haben wir in dem ersten Paragraphen dieses Kapitels die für ruhende Körper und konstantes Feld gültigen Gesetze der ponderomotorischen Kräfte ohne weiteres übertragen. Diese Kräfte werden sich daher ohne merklichen Fehler aus den Maxwellschen Spannungen ableiten lassen und daher dem Gesetze von aktio und reaktio Genüge leisten. Für die langsamen Bewegungen der Körper in langsam veränderlichen Feldern gelten demnach allgemein die Schwerpunkts- und die Flächensätze.

Die Maxwell-Hertzsche Theorie geht noch weiter; sie nimmt an, daß die Maxwellschen Spannungen noch in beliebigen elektromagnetischen Feldern die ponderomotorischen Wirkungen übertragen. Damit das allgemein stattfindet, muß die linke Seite von (248b) den allgemeinen Ausdruck der ponderomotorischen Kraft des elektrischen Feldes, die linke Seite von (249b) den allgemeinen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes bilden. Es wirkt hiernach im magnetischen Felde auf die Volumeinheit die Kraft

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{r}\mathfrak{B}], \tag{250}$$

wo nach (159a)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \rho\mathfrak{v}$$

sich aus Leitungsstrom, Verschiebungsstrom und Konvektionsstrom zusammensetzt. Die Kraft auf den Konvektionsstrom hatten wir bereits im vorigen Paragraphen eingeführt. Hierzu tritt nun noch die neue Kraft

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \mathfrak{B}\right], \tag{250a}$$

die im magnetischen Felde auf einen Verschiebungsstrom wirken soll. Die Maxwell-Hertzsche Theorie nimmt in der Tat an, daß auf den Verschiebungsstrom, welcher den Leitungs- und

Konvektionsstrom zu einer geschlossenen Strömung ergänzt, derartige elektrodynamische Kräfte im magnetischen Felde wirken; dieselben würden natürlich nur in rasch veränderlichen Feldern in Betracht kommen. Auf Grund dieser Annahme ersetzt (249b) allgemein die ponderomotorischen Kräfte des magnetischen Feldes durch die Flächenkräfte $\mathfrak{T}^m$. Damit anderseits die Kräfte des elektrischen Feldes sich allgemein aus den Flächenkräften $\mathfrak{T}^e$ ableiten lassen, muß gemäß (248b) angenommen werden, daß eine entsprechende „magnetodynamische Kraft" im elektrischen Felde auf den „magnetischen Strom" wirkt, nämlich pro Volumeinheit die Kraft

$$\frac{1}{c}\left[\mathfrak{D}\,\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right]. \tag{250b}$$

Auch diese von der Maxwell-Hertzschen Theorie angenommene Kraft kann nur bei sehr raschen Veränderungen des Feldes merklich werden.

Die Kräfte (250a, b) zusammen ergeben für die Volumeinheit eines ungeladenen Isolators die Kraft

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}] = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \tag{250c}$$

Die Maxwellschen Spannungen üben auf die Volumeinheit des ungeladenen Isolators eine resultierende ponderomotorische Kraft aus, sobald der Strahlvektor an der betreffenden Stelle des Feldes sich zeitlich ändert. Obwohl der Betrag dieser Kraft außerordentlich gering ist, so ist diese Folgerung der Maxwell-Hertzschen Theorie doch von prinzipieller Bedeutung. Diese „ponderomotorische Kraft" würde nämlich auch auf die Volumelemente des leeren Raumes wirken, in dem doch ponderable Materie, welche durch sie bewegt werden könnte, sich nicht befindet. Man wird hier dazu geführt, dem Äther selbst eine Trägheit zuzuschreiben, und die Bewegungen zu untersuchen, welche er unter der Einwirkung der Kraft (250c) ausführt. Diese Spekulationen über Ätherbewegung haben indessen nicht irgendwelche Resultate von physikalischem Interesse gezeitigt.

Die von H. A. Lorentz entwickelte Theorie der Elektrodynamik vermeidet die genannte Schwierigkeit, indem sie Kräfte nur auf die Materie und die Elektrizität wirken läßt, von Kräften auf den von Materie und Elektronen leeren Raum jedoch überhaupt nicht spricht. Die Kräfte (250a, b) werden im leeren Raume ein für allemal beseitigt. Die Maxwellschen Spannungen verlieren hier ihre allgemeine Bedeutung; es kann nicht mehr angenommen werden, daß sie es sind, welche die elektromagnetischen Kräfte im leeren Raume übertragen. Sie ergeben dieser Theorie zufolge nur dann richtig die auf das Innere einer ruhenden Fläche wirkende Kraft, wenn das über das Innere erstreckte Integral

$$\int \frac{dv}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$$

gleich Null ist; in solchen Fällen können sie allerdings auch in der Lorentzschen Theorie mit Vorteil verwandt werden.

Die von den Maxwellschen Spannungen übertragenen Kräfte erfüllen allgemein das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung; wenn aber eine Kraft auf den Äther zur Aufrechterhaltung dieses Gesetzes eingeführt werden muß, so heißt das: Für die Materie allein gilt das Gesetz von aktio und reaktio nicht. Die gesamte Bewegungsgröße der ponderablen Materie in einem abgeschlossenen Systeme ist nicht konstant. Man hat vielmehr, wenn man die Sache vom Standpunkte der Maxwell-Hertzschen Theorie aus betrachtet, die Bewegungsgröße der bewegten Äthermassen in Rechnung zu ziehen. Die Lorentzsche Theorie schreibt dem Äther keine träge Masse zu. Die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes von aktio und reaktio gibt sie von vornherein auf; sie schränkt die strenge Gültigkeit des Gesetzes auf solche Fälle ein, wo $\mathfrak{S}$ in jedem Punkte des Feldes konstant ist, die näherungsweise Gültigkeit auf solche Fälle, wo das Integral

$$\int \frac{dv}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t},$$

welches in der Maxwell-Hertzschen Theorie als die vom Äther aufgenommene Kraft zu deuten ist, gegen die sonstigen

mechanischen Kräfte verschwindet. Wir kommen im zweiten Bande des Werkes ausführlich auf diese Dinge zurück.

§ 90. Die erste Hauptgleichung für bewegte Körper.

Wie wir in § 86 die zweite Hauptgleichung (178) auf bewegte Körper übertrugen, so wollen wir jetzt die erste Hauptgleichung (177) auf bewegte Körper ausdehnen, wobei wir uns zunächst an die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper anschließen. Wir gehen mit Hertz von der Grundannahme aus, daß auch in einem bewegten Systeme das Linienintegral der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ längs einer mit der Materie bewegten Kurve proportional ist dem wahren Strome, die eine von der Kurve umrandete, mit der Materie bewegte Fläche durchfließt.

$$\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathfrak{c}_n df. \tag{251}$$

Der wahre Strom $\mathfrak{c}$ setzt sich in einem ruhenden Körper aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zusammen. Dasselbe soll auch für den Strom durch eine bewegte Fläche gelten. Der wahre Strom durch die bewegte Fläche wird gleichzusetzen sein der Summe aus dem Leitungsstrome und der zeitlichen Änderung der elektrischen Verschiebung durch die bewegte Fläche:

$$\int \mathfrak{c}_n df = \int \mathfrak{i}_n df + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{D}_n df. \tag{251a}$$

Die zeitliche Änderung des Flächenintegrales von $\mathfrak{D}_n$ berechnet sich nun, ganz wie in § 86 die zeitliche Änderung des Flächenintegrales von $\mathfrak{B}_n$, für die bewegte Fläche nach der Regel (122); es gilt

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{D}_n df = \int df \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} \right\}_n. \tag{251b}$$

Formen wir die linke Seite von (251) mit Hilfe des Stokesschen Satzes um, und die rechte Seite auf Grund der beiden letzten Gleichungen (251a, b), so folgt

$$\int df \operatorname{curl}_n \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \int \mathfrak{i}_n df + \frac{4\pi}{c} \int df \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D} \mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{D} \right\}_n. \tag{251c}$$

und durch Übergang zu Flächenelementen

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{v} + \text{curl}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]\right\}. \tag{252}$$

Das ist, nach der Theorie von H. Hertz, die erste Hauptgleichung für einen bewegten Körper.

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite sind die Dichten des Leitungsstromes und des Verschiebungsstromes, durch ein ruhend gedachtes Flächenelement des Körpers. Für ein ruhendes Körpersystem bestimmen diese beiden Anteile des wahren Stromes allein den Wirbel des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$. Findet aber eine Bewegung der Körper statt, so treten noch zwei weitere Glieder hinzu. Das Glied $\varrho\mathfrak{v}$ stellt dabei die Dichte des Konvektionsstromes dar; wir bemerkten bereits in § 49, daß der Konvektionsstrom der bewegten Elektrizität den Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zu einer geschlossenen Strömung ergänzt; wir finden jetzt diese Bemerkung bestätigt, denn bei Bildung der Divergenz von (252) verschwindet die linke Seite, und ebenso das letzte Glied der rechten Seite, die drei ersten Glieder der rechten Seite ergeben also in der Tat zusammen ein wirbelfreies Feld.

Der Konvektionsstrom soll nun, der erweiterten ersten Hauptgleichung zufolge, dasselbe magnetische Feld erregen, wie der äquivalente Leitungsstrom. Diese Forderung der Theorie ist von H. A. Rowland experimentell geprüft und bestätigt worden; mehrere Beobachter haben die Versuche Rowlands wiederholt und verfeinert. Besonders bemerkenswert sind die Untersuchungen von A. Eichenwald (Ann. d. Phys. Bd. 11, S. 1, 1903). Bei diesen wird die eine Belegung eines geladenen Kondensators, bestehend aus einer mit einer ringförmigen Stanniolbelegung versehenen Mikanitscheibe, in Rotation versetzt. Hier hat man es mit einem reinen Konvektionsstrome zu tun, Leitungsstrom und Verschiebungsstrom sind bei symmetrischer Anordnung ausgeschlossen. Die Angaben des Magnetometers waren, innerhalb der Fehlergrenze der Versuche (5 Proz. zirka), die gleichen, als wenn die Scheibe

ruhte, und durch die Stanniolbelegung dieselbe Elektrizitätsmenge durch einen Leitungsstrom hindurchgeführt wurde. Dadurch ist erstens gezeigt, daß bei der Rotation des geladenen Stanniolrings die Elektrizität konvektiv mitgeführt wird, und zweitens, daß dabei ein magnetisches Feld erzeugt wird, welches quantitativ der ersten Hauptgleichung (252) entspricht.

Außer dem Konvektionsstrome zeigt (252) nun noch einen zweiten, durch Bewegung im elektrischen Felde entstehenden Strom an, der ebenfalls ein magnetisches Feld erregt. Durch Bewegung eines Dielektrikums im elektrischen Felde soll ein magnetisches Feld hervorgerufen werden, entsprechend, wie durch Bewegung eines Körpers im magnetischen Felde ein elektrisches Feld hervorgerufen wird (vgl. § 86). Die Wirbel dieses Feldes fallen — bei Ausschluß der drei anderen Stromanteile — mit dem des Vektors $\frac{4\pi}{c}[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$ zusammen.

Daß Bewegung eines Dielektrikums im elektrischen Felde in der Tat magnetische Kräfte erzeugt, ist von W. C Röntgen gezeigt worden. Er ließ Glas- oder Ebonitscheiben zwischen zwei ruhenden, geladenen Metallscheiben rotieren und beobachtete eine Ablenkung der Magnetnadel. Jene vierte Stromart, deren Dichte nach der Hertzschen Theorie gleich

(252a) $$\operatorname{curl}[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$$

ist, wird demgemäß bisweilen als „Röntgenstrom“ bezeichnet. Der Röntgenstrom ist stets quellenfrei verteilt. Wir wollen seine Verteilung für die von Röntgen verwandte Anordnung berechnen. Bei dieser ist außerhalb des Dielektrikums $\mathfrak{v}$ gleich Null, innerhalb sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{v}$ konstant; daher ist weder innerhalb noch außerhalb des Dielektrikums ein räumlich verteilter Röntgenstrom vorhanden, sondern nur an den Begrenzungsebenen der dielektrischen Scheibe (gegen Luft) ein Flächenstrom. Die Dichte dieses Flächenstromes ist allgemein gleich dem Flächenwirbel des Vektors $[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$, der nach (104) durch

(252b) $$[\mathfrak{n}, [\mathfrak{D}\mathfrak{v}]_1 - [\mathfrak{D}\mathfrak{v}]_2]$$

gegeben wird.

Die von (2) nach (1) gehende Normale $\mathfrak{n}$ mag, an der der positiv geladenen Metallscheibe gegenüberliegenden Seite der Platte, mit der Richtung von $\mathfrak{D}$ übereinstimmen, so daß hier der Index (2) die Luft, (1) das Dielektrikum kennzeichnet. Da $\mathfrak{v}$ senkrecht auf $\mathfrak{n}$ steht, so ergibt die Regel (32):

$$\left[\mathfrak{n}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]_1\right] = \mathfrak{D}\cdot(\mathfrak{n}\mathfrak{v}_1) - \mathfrak{v}_1(\mathfrak{n}\mathfrak{D}) = -\mathfrak{v}_1\,|\,\mathfrak{D}\,|.$$

Der auf den Luftraum (oder leeren Raum) bezügliche, durch den Index (2) gekennzeichnete Term fällt heraus, da hier $\mathfrak{v} = 0$ ist. Der Betrag von $|\,\mathfrak{D}\,|$ aber, der gleich der zur Trennungsfläche normalen Komponente von $\mathfrak{D}$ ist, durchsetzt stetig die Trennungsfläche; er ist gleich der Flächendichte ω der auf der gegenüberliegenden Metallscheibe verteilten Ladung. Der Röntgenstrom würde also nach der Hertzschen Theorie einem Konvektionsstrom äquivalent sein, bei dem die Ladung $(-\omega)$ von den Oberflächenelementen der dielektrischen Scheibe bei ihrer Rotation mitgeführt wird. Lassen wir die geladenen Metallscheiben zusammen mit einer festen, den Raum zwischen den Platten ausfüllenden Scheibe rotieren, so wäre zu erwarten, daß Konvektionsstrom und Röntgenstrom sich aufheben, und kein magnetisches Feld erregen.

Diese Konsequenzen der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper sind durch die quantitativen Untersuchungen, die A. Eichenwald (Ann. d. Phys. 11, S. 421, 1903) über den Röntgenstrom angestellt hat, nicht bestätigt worden. Er fand, daß die Metallplatten und das Dielektrikum, zusammen rotierend, ein magnetisches Feld erregen, welches von dem Material des Dielektrikums unabhängig ist und nur von der Potentialdifferenz der Belegungen abhängt. Wir können dieses Resultat erklären, wenn wir annehmen, daß bei diesem Versuche die Summe aus Konvektionsstrom und Röntgenstrom der Dichte der freien Elektrizität auf der Metallplatte

$$\omega' = \frac{1}{4\pi}\cdot|\,\mathfrak{E}\,|$$

proportional ist, daß sich mithin das magnetische Feld so berechnet, als ob es nicht von der wahren, sondern von der

freien, konvektiv mitgeführten Ladung erregt würde. Die Flächendichte des Röntgenstromes würde dann an der Fläche, in der Metall und Dielektrikum aneinander grenzen, gleich

$$-(\omega-\omega')\mathfrak{v}=-\left(|\mathfrak{D}|-\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}|\right)\cdot\mathfrak{v}$$

zu setzen sein, statt gleich

$$-|\mathfrak{D}|\cdot\mathfrak{v},$$

wie es die Hertzsche Theorie verlangt.

Die Lorentzsche Elektronentheorie gibt hiervon Rechenschaft. Diese Theorie zerlegt die elektrische Verschiebung bzw. den Verschiebungsstrom in zwei Teile:

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}+\mathfrak{P}\quad\text{(vgl. § 49)}.$$

Der erste Teil ist durch das Feld im Raume bestimmt, und nur der zweite Teil $\mathfrak{P}$ haftet an der Materie. In dieser Theorie nimmt die erste Hauptgleichung eine etwas andere Form an, wie wir im zweiten Bande dieses Werkes ausführlicher darlegen werden.

Der Röntgenstrom wird hier nicht durch die gesamte elektrische Verschiebung, sondern durch den an dem bewegten Dielektrikum haftenden Teil der elektrischen Verschiebung bedingt. Seine Dichte wird gleich

$$\text{curl}\,[\mathfrak{P}\mathfrak{v}]. \tag{252c}$$

Die bei dem Versuche Röntgens im Luftraume in einem senkrechten elektrischen Felde rotierende dielektrische Platte führt demnach an ihren Begrenzungsebenen einen Röntgenstrom mit, dessen Flächendichte durch

$$-\mathfrak{v}\,|\mathfrak{P}|_1$$

bestimmt wird, wo der Index (1) sich auf das Dielektrikum bezieht. Da $|\mathfrak{D}|$ stetig die Trennungsfläche gegen die Luft durchsetzt, so ist

$$|\mathfrak{P}_1|=|\mathfrak{D}_1|-\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}_1|=|\mathfrak{D}_2|-\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}_1|=\frac{1}{4\pi}\{|\mathfrak{E}_2|-|\mathfrak{E}_1|\},$$

es wird also der Röntgenstrom, den die Oberfläche der Platte mit sich führt, gleich

$$+ \mathfrak{v} \cdot \frac{1}{4\pi} \left\{ |\mathfrak{E}_1| - |\mathfrak{E}_2| \right\} = \mathfrak{v} \cdot \omega',$$

wo ω' die Flächendichte der freien Elektrizität ist. Nach der Lorentzschen Elektronentheorie ist der Röntgenstrom an der Oberfläche einer im Luftraume in einem senkrechten elektrischen Felde rotierenden Platte der mitgeführten freien Ladung äquivalent. Auch dieses hat A. Eichenwald quantitativ bestätigt, indem er die entgegengesetzten Flächenströme an den beiden Begrenzungsebenen der rotierenden Platte durch Leitungsströme derselben Verteilung in den Stanniolbelegungen einer ruhenden Mikanitscheibe ersetzte. Er teilte die Belegungen durch feine Risse in einzelne Ringe, derart, daß die Ringe, hintereinander geschaltet, von dem Leitungsstrome

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{v}\omega'$$

durchflossen wurden, und fand die magnetische Wirkung identisch mit derjenigen der im elektrischen Felde rotierenden Platte.

Die Erregnng eines magnetischen Feldes durch Rotation eines dielektrisch polarisierten Körpers entspricht der Erregung eines elektrischen Feldes durch Rotation eines magnetisierten Körpers, die wir in § 87 behandelten und als unipolare Induktion bezeichneten; die Analogie wäre vollkommen, wenn kein remanent magnetisierter Körper, sondern ein im magnetischen Felde rotierender, magnetisch weicher Körper es wäre, der das elektrische Feld erregt. In der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper geschieht, wie wir sahen, die auf den erweiterten Hauptgleichungen fußende Ableitung beider Erscheinungen ganz parallel gehend; der Wirbel von $-\frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$ ist mit dem Wirbel des durch Bewegung im magnetischen Felde erregten elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$, der Wirbel von $\frac{4\pi}{c}[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$ mit dem Wirbel des durch Bewegung im elektrischen Felde er-

regten magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ identisch. Das entspricht der Hertz-Heavisideschen Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $4\pi\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ anderseits. In der Lorentzschen Theorie läßt sich diese Analogie nicht vollkommen durchführen. Denn es wird dort zwar bei Erregung des magnetischen Feldes durch Bewegung im elektrischen Felde $\mathfrak{P}$ an Stelle von $\mathfrak{D}$ gesetzt, d. h. die erste Hauptgleichung erhält eine andere Formulierung, als in der Hertzschen Theorie. Die zweite Hauptgleichung indessen, die ja nichts anderes war, als das erweiterte Faradaysche Induktionsgesetz, bleibt auch in der Lorentzschen Elektrodynamik bewegter Körper unverändert bestehen; es tritt hier nicht etwa der Vektor $\mathfrak{M}$ an Stelle von $\mathfrak{B}$. Worauf diese Abweichung beruht, das kann an dieser Stelle nicht erschöpfend dargelegt werden; wir werden im zweiten Bande ausführlicher auf diesen Punkt zurückkommen. Wir wollen uns hier damit begnügen, zu bemerken, daß die zweite Hauptgleichung auch in der Elektronentheorie sich ergibt, und zwar durch Mittelwertsbildung über die Felder der in der Materie sich bewegenden Elektronen. Die Entwickelungen der §§ 84—87 dieses Abschnittes, die ja von der Erfahrung durchweg bestätigt werden, bleiben auch in der Elektronentheorie gültig.

§ 91. Relative und absolute Bewegung.

Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper spricht nur von der gesamten elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in dem bewegten Körper; sie unterläßt es, die elektrische Verschiebung in zwei Teile zu sondern, die bzw. durch den Äther und durch die Materie bestimmt sind. Man kann die Grundvorstellung der Hertzschen Theorie auch so ausdrücken: Es wird angenommen, daß der Äther sich mit der Materie mitbewegt. Diese Vorstellung bringt Schwierigkeiten mit sich, wenn man es mit stark verdünnten Gasen zu tun hat; auch hier muß angenommen werden, daß, wie verdünnt auch das Gas sein mag, es doch bei seiner den Gesetzen der Mechanik gemäß erfolgenden Bewegung den Äther mitführt;

das kommt schließlich auf dasselbe heraus, als ob man dem Äther selbst ähnliche Eigenschaften zuschreibt, wie materiellen Körpern, und im luftleeren Raume von Bewegungen eines mit träger Masse behafteten Äthers redet. Wir erwähnten bereits in § 89, daß die Hertzsche Theorie in der Tat derartige Spekulationen nahelegt, indem sie aus den Maxwellschen Spannungen resultierende Kräfte im Innern des luftleeren Raumes ergibt. Dabei kann dann der mechanische Satz von der Konstanz der Bewegungsgröße eines abgeschlossenen Systemes aufrecht erhalten werden, indem die bewegten Äthermassen einen — bei den elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne meist sehr kleinen — Teil der Bewegungsgröße aufnehmen. Gleichzeitig wird der Hertzschen Theorie das mechanische Axiom von der Relativbewegung zugrunde gelegt; es werden die elektromagnetischen Wechselwirkungen der Körper nur von ihrer relativen Bewegung abhängig gemacht. Diese Auffassung kann sich darauf berufen, daß für die elektromagnetischen Wechselwirkungen von Körpern, die sich mit der Erde bewegen, der Satz der Relativbewegung tatsächlich gilt, wie schon aus dem Umstande zu ersehen ist, daß diese Wechselwirkungen bisher keinen Anhaltspunkt für die Bestimmung der absoluten Bewegung der Erde ergeben haben. Die Hertzsche Theorie ordnet die Elektrodynamik im wesentlichen in den Gedankenkreis der alten Mechanik ein, nur daß sie an Stelle der dort zugelassenen Fernwirkungen stets Nahewirkungen im Äther setzt; die Axiome der Newtonschen Mechanik, insbesondere das Axiom der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, und dasjenige der Relativbewegung, werden auch bei Mitwirkung elektromagnetischer Kräfte als gültig angesehen.

Bei genauerer Betrachtung stellt es sich allerdings heraus, daß die Axiome der Mechanik bei ihrer Ausdehnung auf die elektromagnetischen Vorgänge einigermaßen ihren Sinn ändern. Das Axiom von Wirkung und Gegenwirkung sagt jetzt nicht mehr aus, daß die Kraft, die ein Körper A auf einen zweiten

Körper B ausübt, in jedem Momente der Kraft entgegengesetzt gleich ist, die B auf A ausübt. Denn es kann ja der Äther einen Teil der Kraft aufgenommen haben. Insbesondere bei den Kräften rasch veränderlicher Felder, z. B. bei den Kräften der Strahlung, kann die in den Äther zu verlegende Kraft wesentlich ins Spiel kommen. In der Tat, es brauchen ja die elektromagnetischen Kräfte Zeit zur Fortpflanzung; wenn also z. B. eine von A entsandte Lichtwelle im Momente der Emission eine Kraft auf den emittierenden Körper ausübt, so kann die Gegenkraft sich nicht gleichzeitig in B bemerkbar machen, sondern erst dann, wenn die Lichtwelle B erreicht hat. Es ist also klar, daß die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen, im Gegensatze zu den instantan wirkenden Fernkräften der alten Mechanik, dem dritten Axiome Newtons einen wesentlich veränderten Sinn gibt. Ähnlich liegt die Sache bei dem Axiome der Relativbewegung. Für quasistationäre Strömung und langsame Bewegung, wo Nahewirkungstheorie und Fernwirkungstheorie in ihren schließlichen Konsequenzen ja übereinstimmen, bleibt, wie das Axiom von Wirkung und Gegenwirkung, so auch das Axiom der Relativbewegung gültig. Die wechselseitigen Kräfte der ponderablen Körper für sich halten einander das Gleichgewicht, und nur von der relativen Bewegung der Körper hängen die elektromagnetischen Vorgänge ab. Für schnelle Bewegungen und rasch veränderliche Felder hingegen, wo die Hertzsche Theorie dazu führt, im luftleeren Raume von Kräften im Äther und von Bewegungen des Äthers zu reden, werden die elektromagnetischen Vorgänge nach dieser Theorie von der relativen Bewegung der Materie und des im luftleeren Raume befindlichen Äthers abhängen müssen. Der weiter ab liegende und von den betrachteten Feldern noch nicht erreichte Äther wird als ruhend anzunehmen sein. Von der Relativbewegung gegen diesen ruhenden Äther, und nicht allein von der Relativbewegung der materiellen Körper gegeneinander, werden die elektromagnetischen Vorgänge in einem bewegten Systeme abhängen. Diese Auffassung ist kaum mehr entfernt

von der Behauptung, daß es absolute Bewegungen gibt und daß die elektromagnetischen Kräfte von der absoluten Bewegung der Körper bzw. der Elektrizität abhängen.

Auch vom Standpunkte der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper ausgehend, werden wir also dazu geführt, das Axiom der Relativbewegung wesentlich zu erweitern und von einer absoluten Bewegung der Körper zu reden. Eine jede elektromagnetische Theorie, welches auch sonst ihre Grundhypothesen sein mögen, kann nicht umhin, dies zu tun. Denn schon die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für ruhende Körper ergeben, daß im leeren Raume sich die ebenen elektromagnetischen Wellen nach allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen; sie postulieren die Existenz eines Bezugssystemes, in welche diese Isotropie der Lichtfortpflanzung wirklich statthat. Dieses Bezugssystem bzw. Körper, die eine in ihm feste Lage haben, werden als ruhend, auf dieses System bezogene Bewegungen werden als „absolute Bewegungen" bezeichnet werden dürfen. Fraglich kann nur sein, welches dieses ruhende Bezugssystem ist. Die Aberration des Fixsternlichtes infolge der Erdbewegung zeigt, daß das Bezugssystem die Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne jedenfalls nicht mitmacht; ob es sich an der Bewegung des Sonnensystemes beteiligt, oder besser gesagt, welches die absolute Bewegung des Sonnensystemes ist, darüber ist nichts bekannt. Man kann daher das ruhende Bezugssystem, welches die elektromagnetischen Gleichungen zugrunde legen, zunächst identifizieren mit dem Bezugssystem der Mechanik, welches durch die Kopernikanischen Vorstellungen über die Bewegungen im Sonnensysteme definiert ist. Wie aus der Theorie des Foucaultschen Pendelversuches bekannt ist, muß die Mechanik annehmen, daß die Newtonschen Axiome in bezug auf dieses System, nicht aber in bezug auf ein mit der Erde rotierendes System, strenge Gültigkeit besitzen. Bezüglich der Translationsbewegung bedarf die gewöhnliche Mechanik einer ähnlichen Annahme nicht; denn die Hinzufügung einer gemeinsamen Translation von konstanter Größe und Richtung ändert

nach ihren Lehren die relativen Bewegungen der Körper des Systemes nicht. Die Theorie des elektromagnetischen Feldes verfährt konsequenter; sie spricht von absoluter Rotation sowohl wie von absoluter Translation in dem soeben angedeuteten Sinne. Sind allerdings die Bewegungen der Körper und die hinzugefügte gemeinsame Translation langsam, d. h. sind ihre Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so wird die Hinzufügung der Translation auch bei Mitwirkung elektromagnetischer Kräfte die relativen Bewegungen der Körper nicht merklich ändern. Das Axiom der Relativbewegung, im Sinne der gewöhnlichen Mechanik verstanden, bleibt hiernach in dem Geschwindigkeitsbereiche, dem die beobachtbaren Bewegungen der ponderablen Körper angehören, näherungsweise gültig; im Prinzip aber ist es aufzugeben.

Versucht man, die Maxwellsche Theorie konsequent auf den von ponderabler Materie leeren Raum anzuwenden, so wird man dazu geführt, das mechanische Axiom von Wirkung und Gegenwirkung und das Axiom der Relativbewegung in einer Weise zu erweitern, welche der Aufhebung dieser Axiome gleichkommt. Diese Axiome, im ursprünglichen Sinne der alten Mechanik verstanden, sind eben mit den Tatsachen nicht zu vereinbaren. Es mag daher zweckmäßiger erscheinen, sich durch die Rücksicht auf die alte Mechanik überhaupt nicht mehr beeinflussen zu lassen, sondern die Axiome der Elektrodynamik so zu formulieren, wie es für die systematische Darstellung der elektrischen und optischen Erscheinungen am geeignetsten erscheint.

Die Lorentzsche Theorie geht in dieser Weise vor. Indem sie eine hypothetische Bewegung des Äthers und hypothetische Kräfte im Innern des Äthers überhaupt nicht einführt, bricht sie von vornherein mit dem Axiome von Wirkung und Gegenwirkung. Der Äther soll überall ruhen, auch im Innern der bewegten Materie; er bestimmt das universelle Bezugssystem, auf welches die „absoluten“

Bewegungen der Elektronen und der ponderablen Körper zu beziehen sind. Wir haben den Übergang zu den Lorentzschen Vorstellungen vorbereitet, indem wir bereits in der Theorie der elektrischen und magnetischen Felder in ruhenden Systemen das Wort „Äther" nur als Abkürzung für den Inbegriff der elektromagnetischen und optischen Vorgänge in dem von ponderablen Körpern leeren Raume einführten. Diese Auffassung, welche dem Raume als solchem physikalische Eigenschaften beilegt, deckt sich nicht mit dem bei geometrischen Betrachtungen herkömmlicherweise angewandten Raumbegriff. Jener geometrische Raumbegriff ist indessen, wie bereits erwähnt wurde, nur als eine Abstraktion aus der Erfahrung anzusehen. Mit jenem geometrischen Raumbegriffe hat man bekanntlich Verallgemeinerungen vorgenommen, indem man mehrdimensionale und nichteuklidische Geometrien entwickelte. Ob die physikalische Raumvorstellung, welche die elektromagnetischen Eigenschaften des Raumes berücksichtigt, ähnlicher Verallgemeinerungen fähig ist, muß als fraglich bezeichnet werden. Solange diese Frage unaufgeklärt ist, wird man gut tun, bei physikalischen Untersuchungen von nichteuklidischen Räumen abzusehen.

Daß der Äther sich nicht mit der bewegten Materie mitbewegt, d. h. daß die elektromagnetischen Vorgänge in einem translatorisch bewegten Körper nicht dieselben sind, als wenn der Körper ruhte, wird durch einen bekannten Versuch von Fizeau bewiesen. Die Geschwindigkeit der Lichtwellen in einer strömenden Flüssigkeit findet sich nicht gleich der Geschwindigkeit des Lichtes in der ruhenden Flüssigkeit, vermehrt um die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung, sondern kleiner. Die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper gibt von dieser Tatsache keine Rechenschaft; ihr zufolge müßte die Relativgeschwindigkeit des Lichtes gegen die strömende Materie von der Geschwindigkeit der Strömung unabhängig sein; der Fizeausche Versuch widerlegt direkt experimentell das Axiom der Relativbewegung in seiner Anwendung auf die Optik bewegter Körper.

Wir werden im zweiten Teile dieses Werkes zeigen, daß die Lorentzsche Theorie diesen Versuch ungezwungen erklärt.

Daß die Annahme eines überall mit der Materie bewegten Äthers sich nicht allgemein durchführen läßt, war Hertz wohlbekannt. Er beanspruchte durch seine Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper nur die elektromagnetischen Erscheinungen in engerem Sinne zu umfassen. Wir haben gesehen, daß dieselben in der Tat bei den Induktionserscheinungen in bewegten Leitern sich bewähren, daß sie sich aber nicht quantitativ mit den Untersuchungen Eichenwalds über den Röntgenstrom vereinbaren lassen (vgl. § 90). Die Hertzschen Grundgleichungen umfassen mithin keineswegs alle heute bekannten elektromagnetischen Vorgänge in engerem Sinne.

Wir werden daher im zweiten Bande dieses Werkes bei der Behandlung der elektromagnetischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern die Anschauungen der Elektronentheorie zugrunde legen. Die Erörterungen dieses Paragraphen zeigen, welche Bedeutung diese aussichtsvollste Weiterbildung der Maxwellschen Theorie bzw. die Tatsachen, auf welche sie sich stützt, über das Gebiet der Elektrizitätslehre hinaus besitzen. Die Umwandlung der Grundbegriffe der Geometrie und Mechanik, welche die Elektronentheorie anstrebt, ist von der größten Tragweite für die gesamte Naturwissenschaft.

Formelzusammenstellung.

I. Allgemeine Regeln der Vektorenrechnung.

Alle Vektoren sind durch Frakturbuchstaben kenntlich gemacht, wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{v}$ usf.; die Beträge sind mit $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$, die Komponenten nach den Koordinatenachsen mit $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ bezeichnet. Das skalare Produkt wird $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, oder, wenn eine Abtrennung von anderen Vektoren erwünscht ist, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ geschrieben; $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ dagegen stellt das Vektorprodukt vor.

1. Vektoralgebra.

(α) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z$ . . (Gl. 21, S. 14)

(β) $$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \quad \begin{pmatrix} \text{Gl. 25, S. 17} \\ \text{u. Gl. 28, S. 18} \end{pmatrix}$$

(γ) $$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix}$$ (Gl. 30 u. 31, S. 20)

(δ) $\big[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ . . . . (Gl. 32, S. 21)

(ε) $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{D})$ (Gl. 33, S. 21)

2. Vektoranalysis.

(ξ) $$\nabla\varphi = \mathfrak{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; .$$ (Gl. 68a, S. 49)

(η) $$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial z} \; . \; .$$ (Gl. 70, S. 53)

(ϑ) $$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = [\nabla, \mathfrak{A}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \end{vmatrix} \quad . \; . \; .$$ (Gl. 91, S. 81)

(ι) $\operatorname{div}\varphi\mathfrak{A} = \varphi \operatorname{div}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\nabla\varphi$ . . . . . (Gl. 72, S. 57)

($\varkappa$) $\operatorname{curl} \varphi \mathfrak{A} = \varphi \operatorname{curl} \mathfrak{A} + [\nabla\varphi, \mathfrak{A}]$ . . . . (Gl. 112, S. 110)

(λ) $\operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}$ . . . (Gl. 102, S. 93)

(μ) $\operatorname{curl} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$
$+ \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A}$ . . . (Gl. 114, S. 112)

(ν) $\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}$
$+ [\mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]$ . . (Gl. 115, S. 112)

(ξ) $\operatorname{div} \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ (Gl. 73a, b, S. 57, 58)

(o) $\operatorname{curl} \nabla\varphi = 0$ . . . . . (Gl. 91a, S. 82)

(π) $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0$ . . . . . (Gl. 94, S. 89)

(ϱ) $\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}$ . . (Gl. 95, S. 89)

Satz von Gauß:

(σ) $\int dv \operatorname{div} \mathfrak{A} = \int df \mathfrak{A}_n$ . . . . . (Gl. 71, S. 56)

Satz von Green:

(τ) $\int dv\{\psi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi, \nabla\psi)\} = \int df \psi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$. (Gl. 75, S. 58)

(υ) $\int dv\{\mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}\} = \int df [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_n$ (Gl. 102a, S. 93)

folgt aus λ und σ.

Satz von Stokes:

(φ) $\int df \operatorname{curl}_n \mathfrak{A} = \int \mathfrak{A} ds$ . . . . . (Gl. 92b, S. 87)

Skalares Potential.

(χ) $\varphi = \int \frac{dv\varrho}{r}$ . . . . . (Gl. 83, S. 68)

dient zur Berechnung des wirbelfreien Feldes

$$\mathfrak{b} = -\nabla\varphi,$$

wenn

$$\operatorname{div} \mathfrak{b} = 4\pi\varrho$$

gegeben ist.

Vektorpotential.

$$(\psi) \quad \mathfrak{A} = \int \frac{dv\,\mathfrak{k}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 100, S. 91)}$$

dient zur Berechnung des quellenfreien Feldes

$$\mathfrak{b} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

wenn

$$\operatorname{curl} \mathfrak{b} = 4\pi \mathfrak{k}$$

gegeben ist, und genügt der Gleichung (98)

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0,$$

wenn $\operatorname{div} \mathfrak{k} = 0$ gilt.

Zeitliche Änderung eines Vektors, beurteilt von einem starr rotierenden Bezugssystem aus (Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$)

$$(\omega) \quad \frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{A}\,\mathfrak{u}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 51, S. 35)}$$

Zeitliche Änderung des Linienintegrales eines Vektors, erstreckt über eine bewegte Kurve ($\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit)

$$(a) \quad \frac{d}{dt}\int_1^2 \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \int_1^2 d\mathfrak{s}\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) - [\mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{A}]\right\}$$

(Gl. 120, S. 118)

Zeitliche Änderung des Flächenintegrales eines Vektors, erstreckt über eine bewegte Fläche

$$(b) \quad \frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_\nu\,df = \int df\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{B}\right\}_\nu$$

(Gl. 122, S. 121)

II. Elektrisches Feld.

$\mathfrak{E}$ elektrische Feldstärke, $\mathfrak{D}$ elektrische Verschiebung, ε Dielektrizitätskonstante, ϱ, ω Raumdichte und Flächendichte der wahren Elektrizität e; ϱ', ω' Raumdichte und Flächendichte der freien Elektrizität e', U elektrische Energie, $\mathfrak{i}$ Dichte des Leitungsstromes, $\mathfrak{k}$ Dichte des wahren Stromes, σ Leitfähigkeit, Q Joulesche Wärme.

(c) $\mathfrak{K} = e \cdot \mathfrak{E}$ (Kraft auf Probekörper) . (Gl. 124, S. 124)

(d) $\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}$ . . . . . (Gl. 136, S. 144)

(e) $\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$, $\omega = -(\mathfrak{D}_{\nu_1} + \mathfrak{D}_{\nu_2})$ . . . (Gl. 137, S. 145)

ν_1, ν_2 Normalen, die nach der Trennungsfläche hinweisen.

(f) $4\pi\varrho' = \operatorname{div} \mathfrak{E}$, $4\pi\omega' = -(\mathfrak{E}_{\nu_1} + \mathfrak{E}_{\nu_2})$ (Gl. 137a, S. 146)

(g) $U = \frac{1}{2}\int dv(\mathfrak{E}\mathfrak{D})$ . . . . . (Gl. 146, S. 165)

(h) $\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}$ (Ohmsches Gesetz) . . . . (Gl. 153, S. 185)

(i) $Q = \int dv(\mathfrak{i}\mathfrak{E}) = \int dv\sigma\mathfrak{E}^2$ . . . . (Gl. 155a, S. 186)

(k) $\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ . . . . . (Gl. 157, S. 188)

III. Elektromagnetisches Feld.

$\mathfrak{H}$ magnetische Feldstärke, $\mathfrak{B}$ magnetische Induktion, $\mathfrak{M}$ Magnetisierung, μ Permeabilität, T magnetische Energie, $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$ Raum- und Flächendichte des freien Stromes.

(l) $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ . . . . . (Gl. 165, S. 216)

(m) $\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ . . . . . (Gl. 165a, S. 217)

Erste Hauptgleichung: 1) wenn nur Leitungsströme vorkommen

(n) $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{i}$ . . . . . (Gl. 169, S. 221)

2) wenn Verschiebungsströme hinzukommen:

(o) $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{c} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right\}$ (Gl. 177, 177a, S. 236, 237)

Zweite Hauptgleichung:

(p) $\operatorname{curl}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e\} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ . . . . . (Gl. 178, S. 238)

(q) $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ . . . . . (Gl. 167, S. 219)

(r) $\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}\} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}$ . . (Gl. 173, 173a, S. 227)

(s) $\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{4\pi \mathfrak{i}'}{c}$, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2] = \frac{4\pi \mathfrak{j}'}{c}$ (Gl. 175, 175a, S. 231)

(t) $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\,\mathfrak{i}}{r} + \int dv \left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right]$ . . . (Gl. 176c, S. 234)

(Vektorpotential eines stationären Feldes).

(u) $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{dv\mu\,\mathfrak{i}}{r} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{dv}{r}[\nabla\mu, \mathfrak{H}]$ . . (Gl. 176e, S. 235)

Feldgleichungen und Energieausdruck für ruhende, isotrope, nicht ferromagnetische Körper:

(v)
$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \mathfrak{E} & \text{. . . . (Gl. 179, S. 244)} \\ -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) & \text{. . . . (Gl. 179a, S. 244)} \\ \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} = 0 & \text{. . . . . (Gl. 179b, S. 244)} \end{cases}$$

(w) $W = \frac{1}{8\pi} \cdot \int dv(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)$ . . . . (Gl. 180, S. 246)

Quasistationäre Ströme:

L Induktionskoeffizienten, K Kapazität, R Widerstand, J Stromstärke, τ Schwingungsdauer.

Koeffizient der gegenseitigen Induktion:

(x) $L_{12} = \mu \cdot \iint \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r}$ . . . . . (Gl. 183b, S. 259)

Magnetische Energie zweier Stromringe:

(y) $T = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2\right\}$ (Gl. 185, S. 263)

(z) $\tau = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{LK}$ (Thomsonsche Formel) (Gl. 192d, S. 282)

Elektromagnetische Wellen.

w Geschwindigkeit, λ Wellenlänge, n Brechungsindex, $\varkappa$ Extinktionskoeffizient. K, L beziehen sich hier auf die Längeneinheit der Leitung.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

3 2044 074 327 792

The borrower must return this item on or before the last date stamped below. If another user places a recall for this item, the borrower will be notified of the need for an earlier return.

Non-receipt of overdue notices does not exempt the borrower from overdue fines.

Harvard College Widener Library
Cambridge, MA 02138 617-495-2413

WIDENER
FEB 1 0 2005
BOOK DUE

Please handle with care.
Thank you for helping to preserve library collections at Harvard.